풀이

# STEP II 1996, 문제 2

순수수학 • 비선형 연립방정식

> **STEP II 1996, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q2

## 핵심 아이디어

주어진 방정식들은 $x$, $y$, $z$에 대해 선형(linear)이 아니지만, 모든 항은 $yz$, $zx$, $xy$라는 단 세 가지 곱 중 하나이다. 이 세 곱을 미지수로 보면 연립방정식은 세 개의 **선형** 방정식이 되고, 소거법(elimination)으로 풀 수 있다. 세 곱을 모두 곱하면 $(xyz)^2$을 얻고, $xyz$를 각 곱으로 차례로 나누면 각각의 변수를 되찾을 수 있다.

## 풀이

### 선형 연립방정식의 변장

다음과 같이 놓는다.

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

그러면 세 방정식은 다음과 같다.

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

(2)에서 $a = 1 + b - 2c$이다. 이를 (1)에 대입하면

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

(3)에 대입하면

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

$b = 3c$를 이용하면 $c = 2$이므로 $b = 6$이고 $a = 1 + 6 - 4 = 3$이다. 계수 행렬(coefficient matrix)의 행렬식(determinant)이 $-3 \neq 0$이므로, 이것이 선형 연립방정식의 **유일한** 해이다.

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

### $xyz = \pm 6$임을 보이기

세 곱을 모두 곱하면

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

이므로 요구한 대로 $xyz = 6$ 또는 $xyz = -6$이다.

> **생각해 보기** 이제 $xyz$와 $yz$, $zx$, $xy$를 각각 알고 있다. $x$ 하나만 따로 구하려면 어떻게 해야 할까?

어느 곱도 0이 아니므로 $x, y, z$ 중 어느 것도 0이 아니고, 따라서 나눗셈을 할 수 있다.

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

### 가능한 값

$xyz = 6$이면 $x = 6/3 = 2$, $y = 6/6 = 1$, $z = 6/2 = 3$이다.

$xyz = -6$이면 $x = -2$, $y = -1$, $z = -3$이다.

위의 각 단계는 모두 필연적이었으므로 이들이 유일한 후보이며, 둘 다 원래 방정식을 만족한다(방정식에는 두 변수의 곱만 나타나므로 세 변수의 부호를 모두 바꾸어도 방정식은 변하지 않는다). 따라서

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{또는} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

## 검산

$(2, 1, 3)$을 대입하면 $yz = 3$, $zx = 6$, $xy = 2$이므로 좌변은 각각 $6 + 6 - 10 = 2$, $3 - 6 + 4 = 1$, $3 - 12 + 12 = 3$이다. 세 식 모두 일치한다. $|p| \leq 12$, $1 \leq q \leq 4$인 분수 $p/q$로 이루어진 모든 세 쌍을 컴퓨터로 탐색한 결과 정확히 위의 두 해만 찾아졌고, 정확한 산술 계산으로 선형 연립방정식의 유일한 해가 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$임을 확인할 수 있다.

## 흔한 실수

- $(xyz)^2 = 36$의 제곱근을 각 변수마다 따로 취하여, 예를 들어 $x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 3$을 서로 독립적으로 쓰는 것. 그러면 여덟 개의 세 쌍이 나오지만 실제로 성립하는 것은 두 개뿐이다. $xyz$의 부호는 하나로 정해지므로 부호들이 서로 연결되어 있기 때문이다.
- 음의 제곱근을 잊고 $(2, 1, 3)$만 답으로 제시하는 것.

## STEP 너머

다루기 까다로운 식에 새 이름을 붙여 비선형(nonlinear) 문제를 선형 문제로 바꾸는 기법은 로그를 취하여 $y = Ae^{kx}$ 같은 곡선을 맞추는 일부터 치환으로 미분방정식(differential equation)을 푸는 일까지 어디에서나 쓰인다. 일단 연립방정식이 선형이 되면 행렬과 행렬식이 해가 유일한지를 곧바로 알려 주는데, 이것이 선형대수학(linear algebra) 첫 강좌의 출발점이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 바로 이런 정신으로 소거법과 행렬식을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.