풀이

STEP II 1996, 문제 13

확률과 통계 • 격자 위의 무작위 행보

STEP II 1996, 13번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s2-q13

핵심 아이디어

이 항등식은 방데르몽드 항등식(Vandermonde's identity)이다. 양변에서 t^n의 계수(coefficient)를 비교하면 된다. 걷기 문제에서 유용한 양은 걸음마다 정확히 1씩 변하는 하나의 수, 즉 내 호텔로부터 북쪽으로 몇 블록, 서쪽으로 몇 블록 떨어져 있는지를 더한 값이다. 내가 한 걸음 걸을 때마다 이 값은 1씩 커지고, 친구가 한 걸음 걸을 때마다 1씩 작아진다. 따라서 우리는 단 한 순간에, 교차로들이 이루는 하나의 대각선 위에서만 만날 수 있고, 만날 확률은 정확히 항등식에 나오는 합이 된다.

풀이

항등식

$(1+t)^n$에서 t^r의 계수는 $\binom{n}{r}$이다. 곱 $(1+t)^n(1+t)^n$에서 t^n인 항은 어떤 $r=0,1,\ldots,n$에 대하여 첫째 인수에서 t^r을, 둘째 인수에서 t^{n-r}을 골라서 얻어진다. 따라서 좌변에서 t^n의 계수는

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}$$

이고, 우변에서는 $\binom{2n}{n}$이다. 두 값을 같다고 놓으면 구하는 항등식을 얻는다. 같은 논증을 $(1+t)^a(1+t)^b=(1+t)^{a+b}$에 적용하면 더 일반적인 형태

$$\sum_{r}\binom{a}{r}\binom{b}{n-r}=\binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

를 얻으며, 이것은 뒤에서 필요하다.

만날 수 있는 곳

내 호텔을 원점에 두고, 블록 단위로 x는 동쪽으로, y는 북쪽으로 잰다. 그러면 친구의 호텔은 $(-n, n)$에 있다. 임의의 위치에 대하여

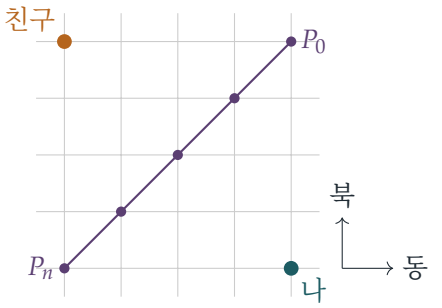
$$D = y - x,$$

로 정의한다. 이것은 내 호텔로부터 북쪽으로 떨어진 블록 수와 서쪽으로 떨어진 블록 수의 합이다. 북쪽이나 서쪽으로 가면 D가 1만큼 커지고, 남쪽이나 동쪽으로 가면 1만큼 작아진다. 따라서 t분 동안 걸은 뒤 나는 $D = t$이고, $D = 2n$에서 출발한 친구는 $D = 2n - t$이다. 걷는 동안 D는 일정하게 변하므로, 이 관계는 블록 중간을 포함한 모든 순간에 성립한다.

같은 시각에 같은 곳에 있으려면 D의 값이 같아야 하므로 $t = 2n - t$, 즉 $t = n$이다. 따라서 우리는 정확히 n분 뒤에만, 그것도 $y - x = n$인 교차로에서만 만날 수 있다. 나의 n걸음은 나를 영역 $-n \le x \le 0, 0 \le y \le n$ 안에 머물게 하므로, 만날 수 있는 점은

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

이다. 이것들은 내 호텔에서 북쪽으로 n블록 떨어진 교차로와 서쪽으로 n블록 떨어진 교차로를 잇는 정사각형의 대각선 위에 있는 $n + 1$개의 교차로이다. (특히 우리는 블록 중간에서 서로 스쳐 지나가는 일이 결코 없다.)



그림은 $n = 4$인 경우이며, 만날 수 있는 점은 대각선 위의 점들이다.

만날 확률

n분 뒤 내가 P_r에 있는 것은 나의 n걸음 중 r걸음이 서쪽, $n - r$걸음이 북쪽일 때이고, 그때뿐이다. n걸음의 각 순서는 확률이 2^{-n}이므로

$$\mathrm{P}(\text{내 위치가} P_r) = \binom{n}{r} \frac{1}{2^n}.$$

친구가 $(-n, n)$에서 n걸음 뒤 $P_r = (-r, n - r)$에 도달하는 것은 그중 $n - r$걸음이 동쪽, r걸음이 남쪽일 때이고, 그때뿐이며, 그 확률은 $\binom{n}{n-r} 2^{-n}$이다. 두 사람의 걷기는 독

립(independent)이고, 서로 다른 r에 대한 사건 "두 사람이 모두 P_r에 있다"는 서로 배반(mutually exclusive)이므로, 항등식에 의하여

$$\mathrm{P}(\text{만남}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

이다.

$2k$분 늦게 출발하는 경우

이번에는 친구가 출발한 때부터 시간 T를 잰다. $T \geq 2k$일 때 나는 $T-2k$분 동안 걸었으므로 $D = T-2k$이고, 친구는 $D = 2n-T$이다. 이 둘은 $T = n+k$일 때만 같다. 이때 나는 $n-k$걸음을 걸었고(여기서 $k \leq n$이므로 이것은 음이 아닌 정수이다), 친구는 $n+k$걸음을 걸었다. $n+k \geq 2k$이므로, 내가 아직 호텔에서 자고 있는 동안 친구가 대각선의 내 쪽에 도달할 수는 없다. 이번에도 우리는 교차로에서만 만날 수 있고, 블록 중간에서는 결코 만나지 않는다.

$n-k$걸음 중 r걸음이 서쪽이면 나는 $(-r, n-k-r)$에 있고, 그 확률은 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$이다. 친구가 같은 점에 있으려면 친구의 $n+k$걸음 중 $n-r$걸음이 동쪽, $k+r$걸음이 남쪽이어야 하고, 그 확률은 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$이다. 앞에서와 같이 r에 대하여 더하면, $a = n-k$, $b = n+k$로 둔 $(*)$에 의하여

$$\mathrm{P}(\text{만남}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

이다.

? **생각해 보기** 늦잠을 자도 왜 아무런 차이가 없을까?

친구의 관점에서, 즉 친구에 대한 나의 상대 위치로 걷기를 바라보자. 친구의 걸음(남쪽 또는 동쪽)과 나의 걸음(북쪽 또는 서쪽)은 각각 친구에 대한 나의 상대 위치를 북쪽으로 한 블록 또는 서쪽으로 한 블록 옮기며, 그 확률은 각각 $\frac{1}{2}$이고 서로 독립이다. 우리는 각 방향으로 n블록씩 떨어져서 출발하고, 전체 $2n$걸음(나의 걸음과 친구의 걸음을 합한 것)이 상대적으로 "북쪽" n번과 "서쪽" n번으로 이루어질 때, 그리고 그때만 만난다. 누가 어느 걸음을 걷는지는 상관이 없으므로, $2n$걸음을 n과 n으로 나누든 $n-k$와 $n+k$로 나누든 답은 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$이다. k에 대한 조건은 단지 내가 내 몫의 걸음을 실제로 걸을 수 있도록 보장할 뿐이다. n이 크면 이 확률은 약 $1/\sqrt{\pi n}$으로 작으며, 내가 짝수 분만큼 늦잠을 자든 안 자든 같다.

$n = 1$, 1분 늦는 경우

이제 나는 $D = T-1$이고 친구는 $D = 2-T$이며, 이 둘은 $T = \frac{3}{2}$일 때만 같다. 이때는 두 사람 모두 블록의 중간에 있는 시각이다. 따라서 우리는 같은 시각에 같은 교차로에 **결코** 있

을 수 없고, 만남이 교차로에서 만나는 것을 뜻한다면 확률은 0이다. 홀짝성(parity)이 바뀌었다. 이제 전체 걸음 수가 홀수이다.

(실제 두 사람이라면 그러하듯이) 블록 중간에서 서로 스쳐 지나가는 것도 만남으로 센다면, $T = \frac{3}{2}$에 같은 블록을 반대 방향으로 걸을 때 우리는 만난다. $T = 1$에 나는 아직 내 호텔 $(0,0)$에 있고 친구는 $(0,1)$ 또는 $(-1,0)$에 있다. 그다음 친구가 $(0,1)$에 있고 남쪽으로 가면서 내가 북쪽으로 가거나, 친구가 $(-1,0)$에 있고 동쪽으로 가면서 내가 서쪽으로 가면 우리는 만난다. 각 경우의 확률은 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$이므로

$$\mathrm{P}(\text{블록 중간에서 만남}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

검산

- 지연이 없는 $n = 1$의 경우, 내가 북쪽으로 가고 친구가 동쪽으로 가거나, 내가 서쪽으로 가고 친구가 남쪽으로 가면 만난다. 확률은 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$이다.
- 컴퓨터로 $n \le 5$와 허용되는 모든 k에 대하여 모든 걷기 쌍을 나열하고, 30초마다 두 사람의 위치를 추적했다. 짝수 지연이 얼마이든 만날 확률은 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$이었고, 만남은 언제나 예측한 단 하나의 시각에 일어났다. $n = 1$이고 1분 지연된 경우에는 $T = \frac{3}{2}$에 블록 중간에서만 만났고, 전체 확률은 $\frac{1}{4}$였다.
- $n = 100$일 때 $\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$으로, $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$에 가깝다.

흔한 실수

- 정사각형 안의 어디에서든, 어느 시각에든 만날 수 있다고 가정하는 것. 양 $y - x$가 만남을 하나의 시각과 하나의 대각선으로 고정한다.
- 만날 수 있는 점들에 대하여 더하지 않고 확률을 제곱하거나, P_r에서 친구의 걸음 수가 서로 뒤바뀐다는 점(친구는 동쪽 걸음이 r번이 아니라 $n - r$번 필요하다)을 잊는 것.

STEP 너머

상대 위치 논증은 커플링(coupling)이다. 두 개의 독립인 랜덤 워크(random walk)를 길이를 합친 하나의 랜덤 워크로 바꾸는 것이며, 이 때문에 $\binom{2n}{n}/4^n$이 계속 다시 나타난다. 같은 양은 직선 위의 단순 대칭 랜덤 워크가 $2n$걸음 뒤에 원점에 돌아와 있을 확률이기도 하며, (스털링 공식(Stirling's formula)에서 얻는) 이 양의 $1/\sqrt{\pi n}$ 감소는 1차원과 2차원에서 그러한 랜덤 워크가 확률 1로 출발점에 돌아온다는 포여(Pólya)의 정리의 핵심이다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 랜덤 워크와 이러한 귀환 확률을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.