풀이

STEP II 1996, 문제 12

확률과 통계 • 최댓값과 최솟값의 분포

> **STEP II 1996, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q12

핵심 아이디어

여러 독립(independent) 확률변수의 최댓값(maximum)을 직접 다루기는 까다롭지만, "최댓값이 작다"는 사건은 다루기 쉽다. 이 사건은 **모든** 변수가 작을 때 정확히 일어나고, 독립성 덕분에 확률을 곱할 수 있다. 그래서 먼저 누적분포함수(cumulative distribution function)를 구하고, 이를 미분하여 밀도를 얻는다. 소문항 (ii)는 그 거울상이다. **최솟값**(*minimum*)이 크다는 것은 모든 변수가 클 때와 정확히 같다.

풀이

소문항 (i)

각 X_j는 $[0,1]$에서 균등분포(uniform distribution)를 따르므로 $0 \le y \le 1$에 대하여 $\mathrm{P}(X_j < y) = y$이다. 이 범위의 y에 대하여 $Y < y$는 모든 j에 대하여 $X_j < y$일 때, 그리고 그때에만 일어난다. 또 X_j들은 독립이므로

$$F(y) = \mathrm{P}(Y < y) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(X_j < y) = y^n, \qquad 0 \le y \le 1.$$

물론 $y < 0$이면 $F(y) = 0$이고 $y > 1$이면 $F(y) = 1$이다. 미분하면 Y의 확률밀도함수(probability density function)는

$$f(y) = \begin{cases} ny^{n-1}, & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{그 외.} \end{cases}$$

이다. (간단히 확인해 보면 $\int_0^1 ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = 1$이다.)

이제 적률(moment)을 구한다.

$$\mathrm{E}(Y) = \int_0^1 y \cdot ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+1},$$
$$\mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 y^2 \cdot ny^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{n}{n+2}.$$

따라서

$$\mathrm{Var}(Y) = \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n\left[(n+1)^2 - n(n+2)\right]}{(n+2)(n+1)^2} = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2},$$

이다. 여기서 $(n+1)^2 - n(n+2) = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n = 1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

생각해 보기 왜 곧바로 $\mathrm{P}(Y = y)$나 Y의 밀도를 쓰려 하지 않고 $\mathrm{P}(Y < y)$를 다루는가?

연속확률변수에서 밀도는 확률이 아니며, "가장 큰 값이 y와 같다"는 사건에는 어느 X_j가 가장 큰지와 나머지가 어떤 값을 갖는지가 뒤섞여 있다. 사건 $\{Y < y\}$는 n개의 독립인 사건의 교집합이므로 그 확률은 단순한 곱이 된다. 분포함수를 구한 뒤 미분하는 것이 최댓값과 최솟값을 다루는 표준적인 방법이다.

소문항 (ii)

T_j를 j번째 전구가 고장 나는 시각이라 하자. 그러면 $\mathrm{P}(T_j \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-t/\lambda}$이고

$$\mathrm{P}(T_j > t) = \mathrm{e}^{-t/\lambda}, \qquad t > 0.$$

이다. 전구들은 서로 독립이므로 T_j들도 독립이다. 첫 번째 고장이 일어나는 시각을 $T = \min(T_1, \ldots, T_n)$이라 하자. 이번에는 $T > t$라는 사건이 다루기 편리한데, 이 사건은 시각 t에 모든 전구가 아직 작동하고 있을 때, 그리고 그때에만 일어난다.

$$\mathrm{P}(T > t) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{P}(T_j > t) = \left(\mathrm{e}^{-t/\lambda}\right)^n = \mathrm{e}^{-nt/\lambda}.$$

따라서 $\mathrm{P}(T \le t) = 1 - \mathrm{e}^{-nt/\lambda}$이고, 미분하면 밀도

$$g(t) = \frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}, \qquad t > 0.$$

를 얻는다. 다시 말해 T는 전구 하나와 같은 종류의 분포를 따르되 λ가 λ/n으로 바뀐 것이다. $u = t$로 두고 부분적분(integration by parts)하면

$$\mathrm{E}(T) = \int_0^\infty t\,\frac{n}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t = \Big[-t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nt/\lambda}\,\mathrm{d}t$$
$$= 0 + \Big[-\frac{\lambda}{n}\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda}\Big]_0^\infty = \frac{\lambda}{n},$$

이다. 여기서 $t \to \infty$일 때 $t\,\mathrm{e}^{-nt/\lambda} \to 0$이므로 경계항은 사라진다. 따라서 첫 번째 고장까지 걸리는 시간의 기댓값(expected value)은 구하려던 대로 λ/n이다.

검산

- $n = 1$이면 Y는 그냥 $[0,1]$에서의 균등분포를 따르고, 공식은 $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$을 준다. 이는 균등분포를 따르는 변수의 익숙한 분산(variance)이다.
- n이 커지면 분산은 $1/n^2$처럼 행동한다. 예상대로 많은 균등분포 변수의 최댓값은 1 쪽으로 바짝 몰린다.
- 소문항 (ii)에서 $n = 1$이면 전구 하나의 기대 수명은 λ이며, 이는 모수가 $1/\lambda$인 지수분포(exponential distribution)의 평균이다.
- 균등분포 변수 다섯 개의 최댓값을 200 000번 모의실험한 결과 분산은 0.01993으로, $\frac{5}{7 \cdot 36} \approx 0.01984$와 비교된다. $\lambda = 3$인 전구 네 개를 모의실험한 결과 첫 고장 시각의 평균은 0.749로, $\frac{3}{4}$와 비교된다.

흔한 실수

- $\mathrm{P}(T > t)$를 미분하면서 음의 부호를 빠뜨려 음수인 "밀도"를 얻는 것.
- $(\mathrm{E}(Y))^2$을 빼야 하는데 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - \mathrm{E}(Y)$라고 쓰는 것.
- n개의 전구가 각각 평균적으로 시각 λ에 고장 나므로 첫 고장도 λ에 일어난다고 생각하는 것. n개 변수의 최솟값은 그 어느 하나보다도 훨씬 작다.

STEP 너머

최댓값과 최솟값은 **순서통계량**(*order statistics*)의 극단적인 경우이다. 표본을 크기순으로 정렬하면, n개의 균등분포 변수 중 k번째로 작은 값은 베타분포(beta distribution)를 따르며, 여기서의 Y는 $k = n$인 경우이다. 소문항 (ii)는 독립인 지수분포 변수들의 최솟값이 다시 지수분포를 따르고 그 비율(rate)이 더해진다는 핵심 사실을 보여 준다. 이 사실은 포아송 과정(Poisson process)과 연속시간 마르코프 연쇄(continuous-time Markov chain) 이론의 원동력이 된다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 그리고 Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문) 모두 이러한 아이디어를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.