풀이

STEP II 1996, 문제 11

역학 • 단순 조화 운동

> **STEP II 1996, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q11

핵심 아이디어

줄이 늘어난 길이(extension), 곧 **승강기에 대한** 입자의 상대 위치를 가지고 생각한다. 지면 좌표계에서 입자에 대한 뉴턴 제2법칙(Newton's second law)을 세우고 이미 알고 있는 승강기의 가속도를 빼면, 남는 것은 옮겨진 중심을 기준으로 한 단진동(simple harmonic motion, SHM)이다. 늘어난 길이가 양수인 동안에는 줄이 팽팽하게(taut) 유지되며, 단진동의 해를 보면 늘어난 길이가 얼마나 작아질 수 있는지 정확히 알 수 있다. 승강기의 가속이 멈추면 진동의 중심만 움직인다. 승강기에 대한 입자의 위치와 속도는 그대로 이어지고, 이 값들로 새로운 진폭(amplitude)이 정해진다.

풀이

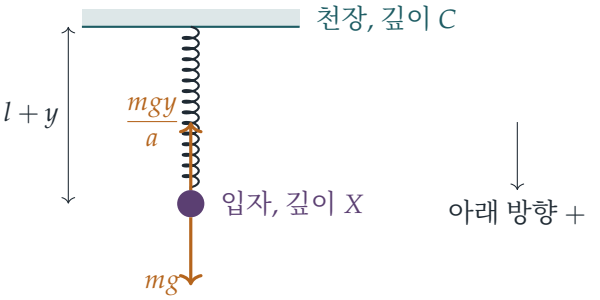
입자는 질량이 m인 것으로, 줄은 가볍고 탄성 계수(modulus)가 λ인 탄성 줄로서 팽팽한 동안 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화한다. 풀이 전체에서 y는 줄의 길이가 자연 길이(natural length) l보다 긴 만큼을 나타내므로, 처음에는 $y = a$이다. 주어진 미분방정식과 맞는 해석은 이것뿐이다. 만약 y를 이전 평형 길이 $l + a$로부터 잰다면 우변은 $-f$가 될 것이다.

운동 방정식

처음 평형 상태에서는 장력 $\lambda a/l$이 무게와 균형을 이루므로

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

이고, 늘어난 길이가 $y > 0$일 때 장력은 mgy/a이다.



지면에 고정된 한 점에서 아래쪽으로 깊이를 잰다. 천장의 깊이를 C, 입자의 깊이를 X라 하면 $X - C = l + y$이다. 승강기는 가속도 f로 내려가므로 $\ddot{C} = f$이다. 줄이 팽팽한 동안 입자에 작용하는 힘을 연직 방향(아래쪽)으로 분해하면

$$m\ddot{X} = mg - \frac{mgy}{a}.$$

$y = X - C - l$이므로 $\ddot{y} = \ddot{X} - \ddot{C} = \ddot{X} - f$이고, 따라서

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{a}y = g - f,$$

이 되어 요구한 식을 얻는다.

줄은 팽팽하게 유지된다; 진폭 af/g

$\omega^2 = g/a$로 놓는다. 상수 특수해(particular solution)는 $y = (g-f)/\omega^2 = a(g-f)/g$이므로 일반해(general solution)는

$$y = a - \frac{af}{g} + A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

이다. $t = 0$에서 입자는 이전 평형 위치에 있고 승강기와 함께 움직이므로 $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = 0$이다. 이로부터 $A = af/g$, $B = 0$을 얻는다.

$$y = a - \frac{af}{g} + \frac{af}{g}\cos\omega t.$$

이것은 $y = a - af/g$를 중심으로 하고 진폭이 af/g인 단진동이다. 승강기에 대한 입자의 위치는 $l + y$이므로, 입자는 승강기에 대하여 진폭 af/g로 진동한다.

> ? **생각해 보기** 줄이 팽팽하다고 가정하는 훅의 법칙을 사용했다. 이것은 순환 논증이 아닌가?

그렇지 않다. 줄이 팽팽하다고 가정하고 방정식을 푼 다음, 그 해가 가정이 성립하는 영역을 결코 벗어나지 않음을 확인하는 것이다. y의 최솟값은

$$y_{\min} = a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

이다. $f < g/2$이기 때문이다. 따라서 y는 계속 양수이고, 줄은 항상 팽팽하며, 해는 자기 모순이 없다. 조건 $f < g/2$가 필요한 곳이 바로 여기이다.

승강기의 가속이 멈춘 뒤

$t > T$에서는 $\ddot{C} = 0$이고, 같은 논법으로

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

를 얻는다. 이것은 자연스러운 평형 늘어난 길이 $y = a$를 중심으로 하는 단진동이다. $z = y - a$로 놓으면 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$이다.

생각해 보기 이 새로운 운동의 초기 조건은 무엇인가?

$t = T$에서 승강기의 가속도는 갑자기 바뀌지만 속도 $\dot{C}$는 그렇지 않으며, 입자의 위치와 속도도 마찬가지이다. 따라서 $y = X - C - l$과 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$는 $t = T$에서 연속이다. 첫 번째 단계의 결과로부터 $t = T$에서

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

이다. 단진동 $\ddot{z} = -\omega^2 z$에서 진폭 R은 어느 순간에나 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$을 만족한다(이것은 에너지 보존(energy conservation)이며, $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$에 항등식 $\cos^2 + \sin^2 = 1$을 적용한 것이기도 하다). 그러므로

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2 \omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2} \cdot 4\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

이다. 여기서 $1 - \cos\theta = 2\sin^2 \frac{1}{2}\theta$를 사용했다. 따라서 새로운 진폭은

$$R = \frac{2af}{g}\,|\sin \tfrac{1}{2}\omega T|,$$

이 되어 요구한 결과를 얻는다.

줄은 결코 느슨해지지(slack) 않는다. 이제 늘어난 길이의 최솟값은

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

이며, 이번에도 $f < g/2$이기 때문이다. 따라서 줄곧 $y > 0$이고 운동 방정식은 계속 유효하다.

검산

- T가 주기의 정수배, 곧 $\omega T = 2k\pi$이면, 승강기의 가속이 멈추는 바로 그 순간 입자는 $y = a$로 돌아와 있고 승강기에 대하여 정지해 있다. 공식은 진폭 0을 주며, 입자는 마땅히 그래야 하듯이 가만히 매달려 있다.
- ωT가 π의 홀수배이면, 입자는 가장 높은 점 $y = a - 2af/g$에 있고 승강기에 대하여 순간적으로 정지해 있다. 새로운 중심은 $y = a$이므로 진폭은 $2af/g$이며, 이는 공식의 최댓값이다.
- 수치적으로, 임의의 a, $f < g/2$, T에 대하여 지면 좌표계에서 전체 운동(승강기와 입자, 줄이 느슨해지면 장력을 끔)을 단계적으로 계산해 보았다. 예를 들어 $a = 0.546$, $f/g = 0.337$, $\omega T = 15.27$일 때 진폭은 0.18380과 0.35864로 나왔고, 이는 af/g 및 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$와 유효숫자 여섯 자리까지 일치했으며, 늘어난 길이는 한 번도 $a - 2af/g$ 아래로 내려가지 않았다.

흔한 실수

- y를 이전 평형 길이 $l + a$로부터 재는 것. 그러면 우변은 $g - f$가 아니라 $-f$가 된다.
- 두 번째 단계를 $\dot{y} = 0$으로 다시 시작하는 것. 일반적으로 $t = T$에서 입자는 승강기에 대하여 움직이고 있으며, 그 속도가 진폭에 기여한다.
- f의 부호를 틀리는 것. **아래쪽으로** 가속하는 승강기는 유효 중력을 $g - f$로 줄이므로 진동의 중심이 올라간다.

STEP 너머

승강기의 가속도를 빼는 것은 가속 좌표계(accelerating frame)에서 생각하는 것과 같으며, 그 좌표계에서는 균일한 가속도 f가 추가적인 중력장 $-f$처럼 작용한다. 이 생각은 가상력(fictitious forces)으로 이어지고, 결국에는 아인슈타인(Einstein)의 등가 원리(equivalence principle)로 이어진다. 두 번째 단계는 힘이 계단처럼 갑자기 바뀌며 구동되는 진동자의 간단한 경우이다. 그 응답은 계단 변화가 진동의 어느 시점에 일어나는지에 따라 달라지며, 이를 다루는 일반적인 도구가 그린 함수(Green's functions)(뒤아멜 원리(Duhamel's principle))이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 비관성 좌표계(non-inertial frames)와 진동자를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.