풀이

STEP II 1996, 문제 10

역학 • 회전하는 바퀴에서 발사된 포물체

> **STEP II 1996, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

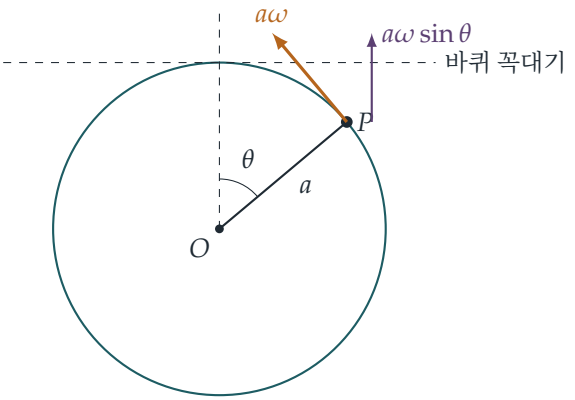
핵심 아이디어

손을 놓는 순간 주인공은 포물체(projectile)가 되며, 그 처음 위치와 속도는 바퀴 위 어디에 있었는지에 따라 정해진다. 높이에는 연직 방향 운동만 중요하므로, 최고 높이는 손을 놓은 지점의 높이에 속도의 연직 성분(vertical component)이 더해 주는 추가 높이를 합한 것이다. 이렇게 하면 높이가 손을 놓는 각 하나의 함수로 표현되고, 문제는 다음과 같이 바뀐다. 이 함수가 언제 바퀴 꼭대기보다 커질 수 있으며, 그 최댓값은 얼마인가?

풀이

문제 설정

주인공을 바퀴 테두리와 함께 움직이는 입자로 모형화하고, 공기 저항은 무시한다. O를 바퀴의 중심이라 하고, 주인공이 OP가 위쪽 연직 방향과 각 θ를 이루는 점 P에서 손을 놓는다고 하자. 단, $0 \leq \theta \leq \pi$이다. 테두리 위에서 주인공의 속력은 $a\omega$이고, 방향은 P에서의 접선(tangent) 방향이다.



P에서의 접선은 OP에 수직이므로 수평 방향과 각 θ를 이룬다. 손을 놓을 때 주인공이 바퀴 꼭대기 쪽으로 움직이고 있다면, 속도의 위쪽 성분은 $a\omega\sin\theta$이다(자주색으로 표시). 꼭대기에서 멀어지는 쪽으로 움직이고 있다면 연직 속도는 아래쪽이거나 0이므로, 손을 놓은 지점보다 높이 올라가지 못하고, 그 지점은 꼭대기보다 높지 않다. 따라서 이런 경우는 무시해도 된다.

손을 놓는 순간 O로부터의 높이는 $a\cos\theta$이다. 중력만 작용하므로 연직 속도는 $a\omega\sin\theta$에서 0으로 줄어들고, $v^2 = u^2 - 2gs$에 의해 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$만큼 더 올라간다. 따라서 바퀴 꼭대기 위로 올라가는 최고 높이는

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

이다. $c = \cos\theta \in [-1,1]$, $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$라 하자. 그러면 $\sin^2\theta = 1 - c^2$이고

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)[k(1+c)-1].\end{aligned}$$

이다.

ω_0 구하기

$c = 1$일 때(꼭대기에서 손을 놓을 때) 예상대로 $H = 0$이다. $c < 1$이면 인수 $1-c$가 양수이므로, $H > 0$일 필요충분조건은 $k(1+c) > 1$이다.

> **생각해 보기** 허용되는 c의 값에 대하여 $k(1+c)$는 얼마나 커질 수 있는가?

$c < 1$이므로 $k(1+c)$는 $[0, 2k)$의 모든 값을 갖지만 $2k$에는 도달하지 못한다. 따라서

- $2k > 1$이면 $c < 1$을 1에 충분히 가깝게 잡아 $k(1+c) > 1$이 되게 할 수 있고, 주인공은 꼭대기보다 높이 올라간다.

- $2k \le 1$이면 모든 $c < 1$에 대하여 $k(1+c) < 2k \le 1$이므로, 모든 손 놓는 지점에서 $H \le 0$이고 주인공은 결코 꼭대기보다 높이 올라갈 수 없다.

조건 $2k \le 1$은 $a\omega^2 \le g$와 같다. 경계인 경우 $\omega^2 = g/a$는 "불가능한" 쪽에 속하므로, 그러한 ω의 최댓값이 존재하며 그 값은

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

이다. (이것은 바퀴 바깥쪽 꼭대기에 놓여 있는 입자가 막 접촉을 잃게 되는 각속도이기도 하다. 이때 구심가속도(centripetal acceleration) $a\omega^2$이 g와 같다.)

$\omega > \omega_0$일 때의 최고 높이

이제 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$이다. c의 함수로서

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

은 위로 볼록한 이차함수이고, 도함수 $1 - 2kc$가 0이 되는 곳, 즉

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

에서 최대가 된다. 이 값은 0과 1 사이에 엄격하게 놓이므로 허용되는 손 놓는 지점(바퀴 꼭대기보다 조금 앞)이며, $[-1, 1]$ 전체에서의 최댓값을 준다. 대입하면

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

이다. $k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$이고 따라서 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$이므로

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 주인공은 꼭대기 쪽으로 움직이는 동안 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$인 곳에서 손을 놓으면 이 높이에 도달한다.

검산

- $\omega = \omega_0$이면 공식은 0을 주어 경계인 경우와 일치한다. 또한 ω가 클 때 공식은 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$처럼 커지는데, 이는 O의 높이에서 속력 $a\omega$로 똑바로 위로 던진 입자가 도달하는 높이이다. 실제로 ω가 클 때 가장 좋은 손 놓는 지점은 속도가 연직 방향인 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 근처이다.
- 단위: ω/ω_0는 무차원량이므로 $H_{\max}$는 길이이다.
- 수치로 확인하면, $a = 2\,\mathrm{m}$, $\omega = 2\omega_0$일 때 공식은 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$를 준다. 손 놓는 지점 $\cos\theta = \frac{1}{4}$에서부터 포물체 운동을 단계적으로 계산하면 같은 값이 나오며, 모든 손 놓는 각을 탐색해 보면 이보다 나은 경우가 없음을 확인할 수 있다.

흔한 실수

- 높이를 바퀴 꼭대기가 아니라 바퀴 중심에서부터 재는 실수. H에 있는 $-a$가 중요하다.
- 속도가 연직 방향인 $\theta = \frac{\pi}{2}$에서 손을 놓는 것이 가장 좋다고 가정하는 실수. 그렇게 하면 추가로 올라가는 높이가 최대가 될 뿐, 전체 높이가 최대가 되지는 않는다.
- 최적의 $c = \omega_0^2/\omega^2$가 실제로 $[-1, 1]$ 안에 있는지 확인하는 것을 잊는 실수.

STEP 너머

여기서 쓴 방법, 즉 어떤 양을 하나의 제어 변수의 함수로 나타내고 최적화하는 방법은 최적 제어(optimal control) 문제의 가장 간단한 형태이다. 이와 가까운 주제로 **궤적의 포락선**(*envelope of trajectories*)("안전 포물선(parabola of safety)")이 있다. 이것은 바퀴 위의 손 놓는 지점들에서 도달할 수 있는 모든 점의 경계로, 같은 판별식 형태의 논증으로 구할 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포물체 운동과 회전 운동을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.