풀이

STEP II 1996, 문제 1

순수수학 • 이항급수의 계수

> **STEP II 1996, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q1

핵심 아이디어

세 괄호의 곱에서 어떤 항의 계수(coefficient)는 각 괄호에서 항을 하나씩 골라 지수의 합이 목표가 되도록 하는 모든 방법에 대한 합이다. (i)에서는 이것이 유한한 경우를 꼼꼼하게 정리하여 세는 일이 된다. (ii)에서는 계수 $1, -2, 3, -4, \ldots$가 $(1+x)^{-2}$의 계수임을 알아볼 수 있고, 괄호에 추가된 항들은 정확히 x^6에서 잘라 낸 부분이 드러나지 않도록 하는 데 필요한 항들이다.

풀이

소문항 (i)

괄호를 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$로 쓰자. 여기서

$$a_k = (-1)^k(k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

세 인수에서 각각 $a_p x^p$, $a_q x^q$, $a_r x^r$를 고르면, 이 선택은 정확히 $p+q+r = 6$일 때 x^6에 기여한다. 따라서 구하는 계수는

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

이다. 모든 항의 부호는 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$이므로 부호는 무시하고 곱 $(p+1)(q+1)(r+1)$을 모두 더하면 된다.

> ? **생각해 보기** 지수를 고르는 방법을 하나도 빠뜨리거나 두 번 세지 않으려면 어떻게 해야 할까?

합이 6이고 각 원소가 4 이하인 순서 없는 세 쌍 $\{p, q, r\}$을 나열한 다음, 각각을 (서로 구별되는) 세 괄호에서 가져오는 순서의 수를 곱한다. 원소가 모두 다르면 순서는 6가지, 정확히 두 개가 같으면 3가지, 세 개가 모두 같으면 1가지이다.

지수	곱 $(p+1)(q+1)(r+1)$	순서의 수	기여
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1 = 15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2 = 20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1 = 16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2 = 24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3 = 27$	1	27

가능한 경우는 이것이 전부이다. 가장 큰 원소는 4, 3, 2 중 하나이고($3\times 1 < 6$이므로 이보다 작을 수 없고, 4를 넘을 수도 없다), 가장 큰 원소 각각에 대해 나머지를 더 작은 두 부분으로 나누는 모든 방법을 나열하였다. 더하면

$$90 + 60 + 48 + 144 + 27 = 369,$$

이므로 x^6의 계수는 $\boxed{369}$이다.

소문항 (ii)

이제 괄호는 $Q(x) = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$이다. $|x| < 1$에서 성립하는 이항전개(binomial expansion)에 의해

$$(1+x)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

이다. $\binom{-2}{k} = \frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!} = (-1)^k(k+1)$이기 때문이다. 따라서 $Q(x)$는 $(1+x)^{-2}$의 전개를 x^6항 다음에서 잘라 낸 것이다. 즉 어떤 멱급수(power series) $R(x)$에 대해

$$(1+x)^{-2} = Q(x) + x^7R(x)$$

이다.

? **생각해 보기** 빠진 꼬리 부분 $x^7R(x)$가 세제곱에서 x^6의 계수에 영향을 주지 않는 까닭은 무엇일까?

세제곱하면

$$(1+x)^{-6} = Q(x)^3 + 3Q(x)^2\,x^7R(x) + 3Q(x)\,x^{14}R(x)^2 + x^{21}R(x)^3.$$

첫째 항을 제외한 모든 항은 x^7에 멱급수를 곱한 꼴이므로 x^7보다 낮은 차수의 x를 포함하지 않는다. 따라서 $Q(x)^3$에서 x^6의 계수는 $(1+x)^{-6}$에서 x^6의 계수와 같다. (달리 말하면, 지수의 합이 6이 되는 곱은 어느 인수에서도 차수가 7 이상인 항을 쓸 수 없다.)

다시 이항전개에 의해

$$\binom{-6}{6} = \frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720} = \binom{11}{5} = 462.$$

따라서 $Q(x)^3$에서 x^6의 계수는 $\boxed{462}$이다.

검산

소문항 (ii)는 소문항 (i)을 독립적으로 검산할 수단이 된다. 두 괄호는 $-6x^5$와 $7x^6$항에서만 다르므로, $462 - 369$는 이 두 항 중 하나를 사용하는 모든 기여의 합이어야 한다. $7x^6$을 사용하는 항은 나머지 두 괄호에서 1을 골라야 한다. 위치가 3가지이고 각각 7을 주므로 합은 21이다. $-6x^5$를 사용하는 항은 나머지 두 괄호에서 $-2x$와 1을 골라야 한다. 배열은 $3\times 2 = 6$가지이고 각각 $(-6)(-2)(1) = 12$를 주므로 합은 72이다. 실제로 $21 + 72 = 93 = 462 - 369$이다. 컴퓨터로 세제곱을 전개하면 곧바로 369와 462를 얻는다.

흔한 실수

- 순서의 수를 세는 것을 잊는 실수: 지수 $4, 2, 0$은 세 괄호에서 1가지가 아니라 6가지 방법으로 나올 수 있다.
- 괄호가 x^4에서 끝나는 소문항 (i)에서 원소 5나 6을 포함한 세 쌍을 넣는 실수.
- 항마다 부호를 걱정하는 것: 지수의 합은 항상 6이므로 모든 기여는 양수이다.

STEP 너머

(ii)의 논증은 **형식적 멱급수**(*formal power series*) 이론의 출발점이다. 급수는 수렴(convergence)을 전혀 생각하지 않고 계수끼리 곱할 수 있으며, 곱에서 x^n의 계수는 각 인수의 x^n까지의 항에만 의존한다. 이렇게 수열을 생성함수(generating function)를 통해 다루는 것은 강력한 세기 도구이다. 예를 들어 $(1-x)^{-m}$에서 x^n의 계수는 n을 음이 아닌 정수 m개의 순서 있는 합으로 나타내는 방법의 수이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 종류의 전개를 다루는 STEP 형식의 연습 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.