풀이

STEP I 1996, 문제 9

역학 • 탄성 끈과 에너지

STEP I 1996, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/96-s1-q9

핵심 아이디어

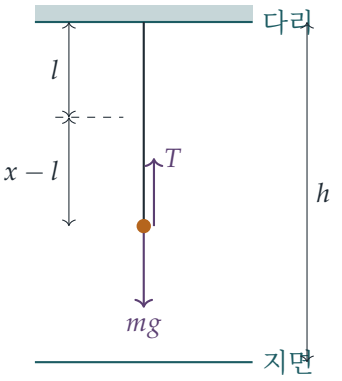
이 문제는 처음부터 끝까지 에너지 문제이다. 일을 하는 힘은 중력과 줄의 장력(tension)뿐이고 둘 다 보존력(conservative force)이므로, 운동 방정식(equation of motion)을 완전히 세울 필요가 전혀 없다. "지면에 겨우 닿지 않는다"는 것은 지면에 도달하는 바로 그 순간 속력이 0이라는 뜻이다. 최대 속력은 가속도의 부호가 바뀌는 곳, 즉 장력이 무게와 평형을 이루는 곳에서 나타난다.

풀이

뛰어내리는 사람을 다리에서 정지 상태로 출발하는 입자로, 줄을 질량이 없고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르는 것으로 모형화하며, 공기 저항은 무시한다. 떨어진 거리를 x라 하자. $x \leq l$일 때는 줄이 느슨하므로 자유 낙하(free fall) 상태이다. $x > l$일 때는 늘어난 길이가 $x - l$이고, 훅의 법칙에 의해 장력은

$$T = \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l},$$

이며, 줄에 저장된 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{mg}{k} \cdot \frac{(x-l)^2}{2l}$이다.



다리의 높이

가장 낮은 지점에서는 순간적으로 정지한다. 지면에 겨우 닿지 않으므로 이 가장 낮은 지점이 바로 지면이고, 이는 $x = h$이다. 분명히 $h > l$이다. 줄이 한 번도 팽팽해지지 않는다면 자유 낙하하여 상당한 속력으로 지면에 부딪힐 것이기 때문이다. 다리를 떠날 때부터 가장 낮은 지점까지 운동 에너지는 O에서 시작하여 O으로 끝나므로, 잃은 중력 퍼텐셜 에너지는 모두 줄에 저장된다.

$$mgh = \frac{mg}{k} \cdot \frac{(h-l)^2}{2l}.$$

양변에 $2kl/(mg)$를 곱하면 $2klh = (h-l)^2 = h^2 - 2hl + l^2$이므로

$$h^2 - 2hl(k+1) + l^2 = 0,$$

이 되어 원하는 식을 얻는다. 근의 공식(quadratic formula)에 의해

$$h = l(k+1) \pm l\sqrt{(k+1)^2 - 1} = l\left(k+1 \pm \sqrt{k^2+2k}\right).$$

? **생각해 보기** 어느 근이 우리가 원하는 근인가? 그리고 다른 근은 애초에 왜 나타나는가?

$k > 0$이므로 $\sqrt{k^2+2k} > \sqrt{k^2} = k$이고, 따라서 음의 부호를 택하면 $h < l(k+1-k) = l$이 된다. 그런데 에너지 방정식은 줄이 $h-l$만큼 늘어났다고 가정한 것이므로 $h > l$일 때만 의미가 있다. 부적절한 근은 제곱 때문에 생긴다. 줄이 실제로는 만들어 낼 수 없는 "압축"에 대해서도 같은 $(h-l)^2$ 값을 주기 때문이다. (두 근의 곱은 l^2이므로 하나는 l보다 크고 다른 하나는 l보다 작다.) 따라서

$$h = l\left(k+1+\sqrt{k^2+2k}\right).$$

최대 속력

줄이 느슨한 동안에는 아래쪽으로 g의 가속도로 가속한다. 줄이 팽팽해지고 나면, 아래쪽을 양의 방향으로 하여 뉴턴(Newton)의 제2법칙을 적용하면

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg}{k} \cdot \frac{x-l}{l}.$$

이 값은 $x - l < kl$인 동안에는 양수이고 그 이후에는 음수이다. 따라서 늘어난 길이가 kl이 될 때까지, 즉 장력이 무게와 같아지는 지점까지는 빨라지고, 그 이후로는 느려진다. 그러므로 최대 속력은 $x = l + kl$에서 나타난다. 다리에서 이 지점까지 에너지 보존(conservation of energy)을 적용하면

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= mg(l+kl) - \frac{mg}{k} \cdot \frac{(kl)^2}{2l} \\ &= mgl(1+k) - \tfrac{1}{2}mgkl.\end{aligned}$$

양변에 2를 곱하고 m으로 나누면

$$v^2 = 2gl + 2kgl - kgl = (k+2)gl,$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

- $k \to 0$이면 줄이 매우 뻣뻣해진다. 이때 $h \to l$이고(줄이 거의 늘어나지 않는다), $v^2 \to 2gl$인데, 이는 l만큼 떨어진 뒤의 자유 낙하 속력이다. 줄이 거의 즉시 사람을 멈추게 하므로 이는 옳다.
- 임의의 k와 l에 대해 운동 방정식을 수치적으로 한 단계씩 계산하면, 가장 낮은 지점과 최대 속력이 소수점 아래 다섯째 자리까지 공식과 일치한다. 예를 들어 $k = 1.5$, $l = 10\,\mathrm{m}$, $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이면 $h = 10(2.5 + \sqrt{5.25}) \approx 47.9\,\mathrm{m}$이고 $v^2 = 343$이므로 $v \approx 18.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$이다.

흔한 실수

- 줄이 팽팽해지는 순간에 최대 속력이 된다고 생각하는 것. 그 순간에는 장력이 0이므로 여전히 가속하고 있다.
- 탄성 에너지에 늘어난 길이 $x - l$ 대신 전체 낙하 거리 x를 쓰는 것.
- $h > l$인지 확인하지 않고 h의 두 근을 모두 남겨 두는 것.

STEP 너머

줄이 팽팽해지고 나면 운동은 평형 상태의 늘어난 길이 kl을 중심으로 하는 단순 조화 운동(simple harmonic motion)이므로, 낙하의 후반부는 각진동수(angular frequency)가 $\sqrt{g/(kl)}$인 사인 곡선의 일부이다. 이처럼 자유 낙하와 진동자 사이를 오가는 구간별 시스템은 에너지 방법과 위상 평면(phase plane) 그림이 매끄럽지 않은 힘을 어떻게 다루는지 보여 주는 좋은 입문 사례이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이 수준에서 에너지 보존과 진동을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.