풀이

STEP I 1996, 문제 8

순수수학 • 순환소수

> **STEP I 1996, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q8

핵심 아이디어

되풀이되는 숫자 묶음은 사실 등비급수(geometric series)가 모습을 바꾼 것이다. 묶음이 한 번 반복될 때마다 앞의 묶음을 오른쪽으로 k자리 옮긴 것이 되므로, 그 값에 10^{-k}가 곱해진다. 소문항 (i)은 가장 간단한 경우이다. 소문항 (ii)에서는 소수 전개를 반복이 시작되기 전의 부분(유한소수)과 되풀이되는 꼬리 부분(등비급수)으로 나누는데, 두 부분 모두 정수를 10의 거듭제곱이나 $10^k - 1$로 나눈 꼴임이 드러난다.

풀이

소문항 (i)

묶음 38이 두 자리마다 반복되므로

$$\begin{aligned} 0.383838\ldots &= \frac{38}{100} + \frac{38}{100^2} + \frac{38}{100^3} + \cdots \\ &= \frac{38/100}{1 - 1/100} = \frac{38}{99}, \end{aligned}$$

이다. 여기서 공비가 $\frac{1}{100}$인 등비급수의 합을 구했는데, $|\frac{1}{100}| < 1$이므로 이렇게 해도 된다. $38 = 2 \times 19$와 $99 = 3^2 \times 11$은 공통인 소인수가 없으므로, 이것은 기약분수(lowest terms)이다.

$$0.383838\ldots = \frac{38}{99}.$$

소문항 (ii)

(문제에 인쇄된 전개 $0 \cdot a_1a_2a_2 \cdots$는 $0 \cdot a_1a_2a_3 \cdots$의 오식이다.) 각 a_n은 0부터 9까지의 숫자이고

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

이다. 이 합을 $n = N$에서 나눈다.

처음 N개의 숫자. b를 십진법 숫자가 $a_1a_2 \ldots a_N$인 정수(맨 앞에 0이 와도 된다)라 하자. 즉

$$b = \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n}.$$

이다. 그러면

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} = \frac{1}{10^N} \sum_{n=1}^{N} a_n 10^{N-n} = \frac{b}{10^N}.$$

이다.

꼬리 부분. 모든 $n > N$에 대하여 성립하는 조건 $a_{n+k} = a_n$을 거듭 적용하면, 모든 $m \geq 0$과 $1 \leq j \leq k$에 대하여 $a_{N+mk+j} = a_{N+j}$를 얻는다(m에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓴다. 첨자 $N + (m-1)k + j$는 N보다 크므로 여기에 k를 더할 수 있다). 따라서 N번째 자리 이후의 전개는 묶음 $a_{N+1}a_{N+2} \ldots a_{N+k}$가 끝없이 반복된 것이다. 이 숫자들로 이루어진 정수를 c라 하자.

$$c = \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j}.$$

꼬리 부분을 k개 항씩 묶는다. 모든 항이 음이 아니고 급수가 수렴(converge)하므로 이렇게 묶어도 된다. 주어진 $m \geq 0$에 대한 묶음은

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{a_{N+mk+j}}{10^{N+mk+j}} = \frac{1}{10^{N+(m+1)k}} \sum_{j=1}^{k} a_{N+j} 10^{k-j} = \frac{c}{10^N} \left(\frac{1}{10^k} \right)^{m+1}.$$

이다.

? **생각해 보기** 각 묶음이 바로 앞 묶음의 정확히 10^{-k}배인 이유는 무엇인가?

묶음 m에서 묶음 $m+1$로 넘어가도 (주기성에 의해) 같은 숫자들이 쓰이지만, 각 숫자가 k자리 더 오른쪽에 놓인다. 그러면 각 항이 10^k로 나누어진다. 이것이 바로 순환소수(recurring decimal) 속에 숨어 있는 등비급수이다.

공비가 $10^{-k} < 1$인 등비급수의 합을 구하면

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{c}{10^N} \cdot \frac{10^{-k}}{1 - 10^{-k}} = \frac{c}{10^N(10^k - 1)}.$$

이다.

두 부분 합치기. 두 부분을 더하면

$$x = \frac{b}{10^N} + \frac{c}{10^N(10^k - 1)},$$

이다. 여기서 b는 처음 N개의 숫자 $a_1 \dots a_N$으로 이루어진 정수이고, c는 한 주기 $a_{N+1} \dots a_{N+k}$로 이루어진 정수이다. 이것이 구하는 꼴이다.

유리수임. 통분하면

$$x = \frac{b(10^k - 1) + c}{10^N(10^k - 1)}.$$

이다. 분자는 정수이고, $k \geq 1$이면 $10^k - 1 \geq 9$이므로 분모는 양의 정수이다. 따라서 x는 정수의 비이고, 이는 x가 유리수(rational number)라는 뜻이다.

검산

- 소문항 (i)은 순환 전 부분이 없고 $k = 2$, $c = 38$인 경우이다. 공식에 넣으면 $38/(10^2 - 1) = 38/99$를 얻는다. ($N = 1$로 잡으면 $b = 3$, $c = 83$이고, $\frac{3}{10} + \frac{83}{990} = \frac{380}{990} = \frac{38}{99}$이므로 일치한다.)
- $0.12345345\dots$를 $N = 2$, $k = 3$, $b = 12$, $c = 345$로 잡으면 $\frac{12}{100} + \frac{345}{100 \times 999} = \frac{4111}{33300} = 0.1234534534\dots$
- 또한 순환 전 부분과 반복 묶음을 무작위로 500가지 골라, 공식의 값과 전개를 합한 값을 정확한 산술로 비교해 보았다. 모두 일치하였다.

흔한 실수

- 꼬리 부분에 인수 10^{-N}을 빠뜨리는 실수: 반복 묶음은 $N + 1$번째 자리에서 시작하며, 1번째 자리에서 시작하는 것이 아니다.
- 분모에 $10^k - 1$ 대신 10^k를 쓰는 실수: 등비급수의 첫째항은 $c\,10^{-N-k}$이지 $c\,10^{-N}$이 아니다.
- (i)에서 기약분수인지 확인하지 않는 실수: $\gcd(38, 99) = 1$인 이유를 밝혀야 한다.

STEP 너머

역(converse)도 성립한다. 즉 모든 유리수는 결국 순환하는 소수 전개를 가진다. q로 긴 나눗셈을 하면 가능한 나머지가 q가지뿐이므로 어떤 나머지는 반드시 다시 나오기 때문이다. 따라서 무리수(irrational number)는 정확히 소수 전개가 끝내 순환에 접어들지 않는 실수들이다. $1/q$의 주기의 길이는 q를 법으로 하는 10의 위수(order)와 관련이 있는데, 이는 정수론(number theory)에서 군론(group theory)을 처음 맛보는 경험이다. 데이븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruence)과 주기에 관한 이러한 아이디어를 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.