풀이

STEP I 1996, 문제 7

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP I 1996, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q7

핵심 아이디어

"양에 비례하는 속도로 흘러나간다"는 말은 곧바로 일계(first-order) 미분방정식(differential equation) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$ (단, $k > 0$)로 옮겨지며, 그 해는 지수함수(exponential function)이다. e^{-k}를 하나의 수 b로 쓰면 지수함수가 b^t 꼴이 되고, 같은 치환 $k = -\ln b$로 소문항 (ii)의 방정식도 다시 쓸 수 있다. 그 방정식은 선형(linear)이므로 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다.

풀이

소문항 (i)

물이 흘러나가므로 y는 y에 비례하는 속도로 감소한다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky \qquad \text{단, 상수} k > 0.$$

탱크에 물이 있는 동안은 $y > 0$이므로 변수분리(separation of variables)를 할 수 있다.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int k\,\mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad \ln y = -kt + c.$$

$t = 0$일 때 $y = 1$이므로 $c = \ln 1 = 0$이다. 따라서

$$y = \mathrm{e}^{-kt} = \left(\mathrm{e}^{-k}\right)^t = b^t, \qquad \text{단, } b = \mathrm{e}^{-k}.$$

$k > 0$이므로 $0 < b < 1$이고, 특히 요구한 대로 $b < 1$이다. 나중을 위해 다음을 적어 둔다.

$$\ln b = -k, \qquad \text{따라서} \qquad k = -\ln b > 0.$$

소문항 (ii)

흘러나가는 양은 앞에서와 똑같이 같은 상수 k에 대해 속도 ky이고, 여기에 더해 물이 속도 a로 들어온다. 따라서 알짜 변화율은 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a - ky.$$

? **생각해 보기** 이 방정식에는 k만 나오는데, $\ln b$는 어디에서 나오는가?

상수 b는 소문항 (i)에서 $b = \mathrm{e}^{-k}$로 정의되었으므로, 오직 유출만을 나타내며 여기서도 여전히 같은 수이다. $k = -\ln b$를 대입하면 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a + y\ln b$, 즉

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\ln b = a,$$

를 얻으며, 이것이 구하는 방정식이다.

이 방정식은 y에 대해 선형이고 계수가 상수이다. 적분인자는

$$\exp\left(-\int \ln b \,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{e}^{-t\ln b} = b^{-t}.$$

양변에 b^{-t}를 곱하면, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}b^{-t} = -b^{-t}\ln b$이므로 좌변은 완전미분(exact derivative)이 된다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y\,b^{-t}) = a\,b^{-t}.$$

$\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{b^{-t}}{\ln b}$ ($\ln b \neq 0$이므로 성립한다)를 이용해 적분하면

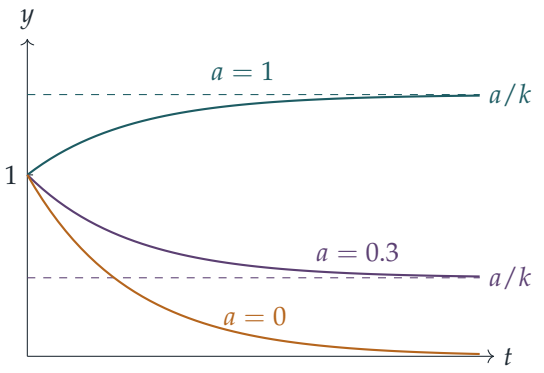
$$y\,b^{-t} = -\frac{a}{\ln b}\,b^{-t} + C.$$

$t = 0$일 때 $y = 1$이므로 $1 = -\dfrac{a}{\ln b} + C$이고, $C = 1 + \dfrac{a}{\ln b}$이다. 양변에 b^t를 곱하면

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a}{\ln b} + \left(1 + \frac{a}{\ln b}\right) b^t \\ &= b^t + \frac{a\,(1 - b^t)}{-\ln b}. \end{aligned}$$

두 형태 모두 괜찮다. $-\ln b = \ln(1/b) > 0$이므로 두 번째 형태가 읽기 더 쉽다. 이는 소문항 (i)의 해 b^t에 유입에서 생기는 양의 항을 더한 것이다.

$t \to \infty$일 때 ($0 < b < 1$이므로) $b^t \to 0$이고, 따라서 $y \to \dfrac{a}{-\ln b} = \dfrac{a}{k}$이다. 이것이 평형(equilibrium) 수위로, 이 수위에서 유출 ky가 유입 a와 정확히 균형을 이룬다. $a > k$이면 탱크는 이 수위를 향해 차오르고, $a < k$이면 이 수위를 향해 빠진다.



그림은 $b = \frac{1}{2}$ (즉 $k = \ln 2 \approx 0.693$)일 때 $a = 1$, $a = 0.3$인 경우와, 비교를 위해 소문항 (i)의 곡선 $a = 0$을 나타낸 것이다.

검산

- $a = 0$을 대입하면 답은 소문항 (i)의 결과인 $y = b^t$가 된다.
- $t = 0$일 때: $y = 1 + \frac{a(1-1)}{-\ln b} = 1$.
- $y = b^t + \frac{a}{\ln b}(b^t - 1)$을 미분하면 $y' = b^t \ln b + ab^t$를 얻고, 한편 $y \ln b + a = b^t \ln b + a(b^t - 1) + a = b^t \ln b + ab^t$이므로 일치한다.
- 수치적으로 $b = \frac{1}{2}$, $a = 1$, $t = 2$일 때 공식은 $y \approx 1.3320$을 준다. 룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 미분방정식을 단계별로 계산해도 같은 값이 나오며, 임의의 a, b, t에 대해서도 대체로 약 10^{-13} 이내로 일치한다.

흔한 실수

- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$로 쓰고 나서 유출이므로 k가 음수여야 한다는 점을 잊는 것. 바로 이 부호 때문에 $b < 1$이 된다.
- 소문항 (ii)에서 b를 새로운 미지수로 취급하는 것. b는 유출만으로 정해지므로 $\ln b = -k$가 그대로 이어진다.
- $\int b^{-t}\,\mathrm{d}t = -b^{-t}/\ln b$에서 부호를 틀리는 것. 미분해서 확인하라.

STEP 너머

이것은 가장 단순한 구획 모형(compartment model)으로, 일정한 유입과 비례하는 유출이 있는 탱크 하나로 이루어진다. 같은 방정식이 일정한 속도로 혈류에 주입되고 신장에 의해

제거되는 약물이나, 저항을 통해 충전되는 축전기도 기술한다. 모든 해는 평형값 a/k로 지수적으로 다가가는데, 이는 안정 고정점(stable fixed point)의 한 예이며, 이 개념은 연립 미분방정식을 배울 때 핵심이 된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 일계 선형 방정식과 이와 같은 여러 혼합 문제를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.