풀이

STEP I 1996, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 합과 적분

> **STEP I 1996, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q6

핵심 아이디어

주어진 항등식은 망원(telescoping) 꼴로 상쇄되도록 만들어져 있다. 합 $\sum \cos kx$에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하면 각 항이 두 사인의 차가 되고, 이웃한 차들이 서로 상쇄된다. f를 코사인의 합으로 나타내고 나면, (ii)의 까다로워 보이는 적분들은 코사인 하나하나의 적분이 되며, 그 대부분은 $[0,\pi]$에서 0이 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 n은 양의 정수이다.

소문항 (i)

$S=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$라 하자. 여기에 $2\sin\frac{1}{2}x$를 곱하고 주어진 공식을 각 항에 적용하면

$$\begin{aligned}2\sin\tfrac{1}{2}x\,S &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\sin(k+\tfrac{1}{2})x-\sin(k-\tfrac{1}{2})x\Big)\\ &= (\sin\tfrac{3}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)+(\sin\tfrac{5}{2}x-\sin\tfrac{3}{2}x)+\cdots+(\sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin(n-\tfrac{1}{2})x)\\ &= \sin(n+\tfrac{1}{2})x-\sin\tfrac{1}{2}x,\end{aligned}$$

이다. 중간의 모든 항이 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 상쇄되기 때문이다. 따라서

$$\sin(n+\tfrac{1}{2})x=\sin\tfrac{1}{2}x+2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{k=1}^{n}\cos kx.$$

$0 < x \le \pi$이면 $0 < \frac{1}{2}x \le \frac{1}{2}\pi$이므로 $\sin\frac{1}{2}x > 0$이고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx,$$

이것으로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

> **생각해 보기** f는 $x = 0$에서 정의되지 않는다. 그렇다면 $\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$가 애초에 의미 있는 적분일까?

그렇다. 소문항 (i)에 의해 $0 < x \le \pi$에서 함수 f는 코사인 다항식 $1 + 2\sum\cos kx$와 일치하며, 이 다항식은 $[0, \pi]$ 전체에서 연속(continuous)이다(0에서의 값은 $2n+1$). 한 점에서의 함숫값을 바꾸거나 정의하지 않은 채로 두어도 적분값은 달라지지 않으므로, 대신 코사인 합을 적분하면 된다.

첫 번째 적분. $k \ge 1$인 각 정수 k에 대하여

$$\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = 0,$$

이다. $\sin k\pi = 0$이기 때문이다. 따라서 상수항만 남는다.

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x = \pi.$$

두 번째 적분. 이제

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x + 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x.$$

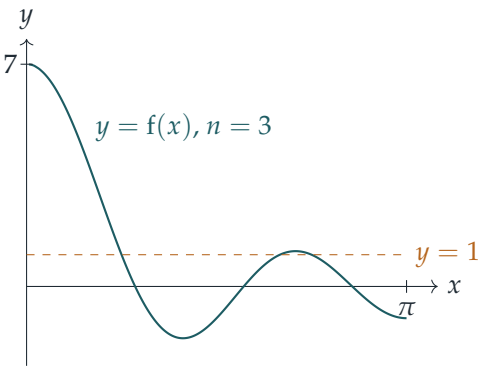
첫 번째 적분은 $[\sin x]_0^\pi = 0$이다. 나머지 적분에는 $2\cos kx\cos x = \cos(k+1)x + \cos(k-1)x$를 이용한다.

$$2\int_0^\pi \cos kx\cos x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(k+1)x\,\mathrm{d}x + \int_0^\pi \cos(k-1)x\,\mathrm{d}x.$$

여기서 $k+1 \ge 2$이므로 첫 번째 적분은 앞에서와 같이 0이다. 두 번째 적분도 $k-1 = 0$인 경우를 제외하면 0이며, 그 경우에는 피적분함수가 1이므로 적분값은 π이다. 따라서 $k = 1$인 항만 기여하고,

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = \pi.$$

(n이 0일 수 있다면 $\mathrm{f} \equiv 1$이고 이 적분은 0이 된다. $n \ge 1$인 모든 경우에는 π이다.)



이 그림은 첫 번째 답이 n에 의존하지 않는 이유를 보여 준다. 0 근처의 높은 봉우리(높이 $2n+1$)가 진동하는 부분과 균형을 이루어, 전체 넓이는 항상 상수항의 넓이인 π가 된다.

검산

- $x \to 0$일 때 $\sin(n+\frac{1}{2})x / \sin\frac{1}{2}x \to (2n+1)$이고, $x = 0$에서 코사인 합의 값은 $1+2n$이다. 두 값이 일치한다.
- $x = \pi$에서: $\mathrm{f}(\pi) = \sin(n+\frac{1}{2})\pi = (-1)^n$이고, $1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = (-1)^n$ 역시 성립한다.
- $n = 1, \ldots, 7$에 대하여 원래의 분수식을 중점법(midpoint rule)으로 수치적분하면 두 적분 모두 3.14159265…가 나와 π와 일치한다.

흔한 실수

- $\sin\frac{1}{2}x$로 나누는 것을 정당화하지 않는 실수: 이 값이 0이 아닌 것은 바로 $0 < x \leq \pi$이기 때문이다.
- 모든 k에 대하여 $\int_0^\pi \cos kx \cos x \,\mathrm{d}x = 0$이라고 써서 두 번째 적분을 0으로 얻는 실수: $k = 1$인 항은 $\int_0^\pi \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\pi$를 준다.

STEP 너머

함수 f는 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel)으로, 푸리에 급수(Fourier series) 이론의 중심 대상이다. (ii)의 계산은 직교성(orthogonality)의 예이다. $\cos kx$와 $\cos mx$를 곱하여 $[0, \pi]$에서 적분하면 $k = m$인 경우를 제외하고 0이 된다. 바로 이렇게 푸리에 계수를 뽑아내며, 함수에 디리클레 핵을 곱하여 적분하면 그 함수의 푸리에 급수의 n번째 부분합이 얻어진다. 이러한

부분합이 언제 수렴하는지에 대한 엄밀한 논의는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.