풀이

STEP I 1996, 문제 5

순수수학 • 복소수의 제곱근

> **STEP I 1996, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q5

핵심 아이디어

각 소문항은 다음 소문항으로 이어진다. 소문항 (i)은 유리수 부분과 무리수 부분을 비교하는 문제이며, 이를 통해 $4-2\sqrt{3}$이 완전제곱수(perfect square)임을 알 수 있다. 소문항 (ii)는 복소수의 제곱근(complex square root)을 구하는 문제인데, 늘 하듯이 "실수부와 허수부를 비교하는" 단계를 거치고 나면 소문항 (i)로 귀착된다. 소문항 (iii)은 이차방정식이며, 그 판별식(discriminant)은 소문항 (ii)의 수의 네 배가 되므로, 필요한 제곱근은 이미 구해 놓은 셈이다.

풀이

소문항 (i)

전개하면

$$(r+s\sqrt{3})^2 = (r^2+3s^2)+2rs\sqrt{3}.$$

이것이 $4-2\sqrt{3}$과 같아야 한다. r와 s가 유리수이므로 r^2+3s^2과 $2rs$도 유리수이다. a,b,c,d가 유리수이고 $b\neq d$일 때 $a+b\sqrt{3}=c+d\sqrt{3}$이라면 $\sqrt{3}=(a-c)/(d-b)$가 유리수가 되는데, 이는 사실이 아니다. 따라서 유리수 부분과 $\sqrt{3}$의 계수를 각각 비교할 수 있다.

$$r^2+3s^2=4, \qquad rs=-1.$$

그러면 $r\neq 0$이므로 $s=-1/r$이고, 첫 번째 식은 다음과 같이 된다.

$$r^2+\frac{3}{r^2}=4 \iff r^4-4r^2+3=0 \iff (r^2-1)(r^2-3)=0.$$

$r^2 = 3$이면 $r = \pm\sqrt{3}$인데, 이는 유리수가 아니다. 따라서 $r^2 = 1$이고, 해는

$$r = 1,\ s = -1 \qquad \text{그리고} \qquad r = -1,\ s = 1,$$

즉 $r + s\sqrt{3} = \pm(1 - \sqrt{3})$이다. 실제로 $(1 - \sqrt{3})^2 = 1 - 2\sqrt{3} + 3 = 4 - 2\sqrt{3}$이다.

소문항 (ii)

전개하면 $(p + q\mathrm{i})^2 = (p^2 - q^2) + 2pq\,\mathrm{i}$이다. p와 q가 실수이므로 실수부와 허수부를 비교할 수 있다.

$$p^2 - q^2 = 3 - 2\sqrt{3}, \qquad pq = 1 - \sqrt{3}.$$

두 번째 식에서 $p \neq 0$이므로 $q = (1 - \sqrt{3})/p$이고 $q^2 = (1 - \sqrt{3})^2/p^2 = (4 - 2\sqrt{3})/p^2$이다. 이를 첫 번째 식에 대입하고 양변에 p^2을 곱하면

$$p^4 - (3 - 2\sqrt{3})\,p^2 - (4 - 2\sqrt{3}) = 0.$$

> ? **생각해 보기** 이것은 p^2에 대한 이차식인데 계수가 복잡해 보인다. 빠르게 인수분해할 방법이 있을까?

p^2에 대한 두 근의 합은 $3 - 2\sqrt{3}$, 곱은 $-(4 - 2\sqrt{3})$이어야 한다. -1을 넣어 보자. 그러면 다른 근은 $4 - 2\sqrt{3}$이 되고, 실제로 $-1 + (4 - 2\sqrt{3}) = 3 - 2\sqrt{3}$이다. 따라서

$$(p^2 + 1)(p^2 - (4 - 2\sqrt{3})) = 0.$$

p는 실수이므로 $p^2 \neq -1$이고, 소문항 (i)에 의해 $p^2 = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$이다. 그러므로 $p = \pm(\sqrt{3} - 1)$이고 $q = (1 - \sqrt{3})/p = \mp 1$이다. 해는

$$p = \sqrt{3} - 1,\ q = -1 \qquad \text{그리고} \qquad p = 1 - \sqrt{3},\ q = 1.$$

다시 말해 $(3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$의 제곱근은 $\pm((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i})$이다. 확인해 보면 $((\sqrt{3} - 1) - \mathrm{i})^2 = (4 - 2\sqrt{3}) - 1 - 2(\sqrt{3} - 1)\mathrm{i}$이며, 이는 구하려던 수이다.

소문항 (iii)

근의 공식(quadratic formula)에 의해(완전제곱식 만들기가 $\mathbb{C}$에서도 똑같이 성립하므로 근의 공식은 복소수 계수에서도 성립한다)

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{2(1 + \mathrm{i})} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (1 + \mathrm{i})(2\sqrt{3} - 2)}}{1 + \mathrm{i}},$$

이고, 여기서 $\pm\sqrt{\ }$는 두 복소수 제곱근을 나타낸다. 근호 안의 값은

$$1 - (2\sqrt{3} - 2) - (2\sqrt{3} - 2)\mathrm{i} = (3 - 2\sqrt{3}) + 2(1 - \sqrt{3})\mathrm{i},$$

로, 정확히 소문항 (ii)의 수이다. 그 제곱근은 $\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})$이므로

$$z=\frac{1\pm((\sqrt{3}-1)-\mathrm{i})}{1+\mathrm{i}},\quad \text{따라서}\quad z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}},\qquad z_2=\frac{(2-\sqrt{3})+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

분자와 분모에 $1-\mathrm{i}$를 곱하면(분모가 2가 된다)

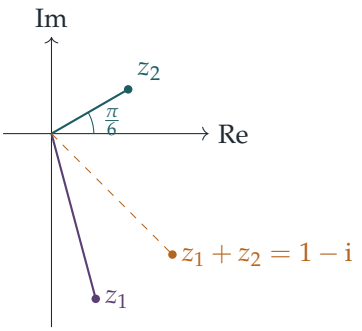
$$z_1=\frac{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}}{2},$$
$$z_2=\frac{((2-\sqrt{3})+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}}{2}.$$

생각해 보기 이것이 "가능한 한 간단한 꼴"일까? 어느 한 근이라도 더 정리할 수 있을까?

두 번째 근은 $(3-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}=(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})$로 인수분해되고, $\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$이다. 첫 번째 근은 $|z_1|^2=\frac{1}{4}((4-2\sqrt{3})+(4+2\sqrt{3}))=2$이고, $z_1=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$는 $2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}$을 $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$로 나눈 몫이다. 따라서 해는

$$z_1=\tfrac{1}{2}((\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)\mathrm{i})=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/12},$$
$$z_2=\tfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/6}.$$

어느 꼴(직교 형식(Cartesian form)이든 극형식(modulus–argument form)이든)로 답해도 충분히 좋은 최종 답이다.



검산

- 근과 계수의 관계: $az^2+bz+c=0$에서 $z_1+z_2=-b/a=2/(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$이고 $z_1z_2=c/a=(2\sqrt{3}-2)/(1+\mathrm{i})=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$이어야 한다. 직교 형식으로부터 $z_1+z_2=\frac{1}{2}(2-2\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$이고, 극형식으로부터 $z_1z_2=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}=(\sqrt{3}-1)(1-\mathrm{i})$이다. 둘 다 일치한다.
- 수치적으로 $z_1\approx 0.366-1.366\mathrm{i}$, $z_2\approx 0.634+0.366\mathrm{i}$이며, 어느 쪽을 $(1+\mathrm{i})z^2-2z+2\sqrt{3}-2$에 대입해도 기계 정밀도 범위에서 0이 된다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 $\sqrt{3}$의 계수를 비교해도 되는 **이유**를 밝히지 않는 것. 이는 r, s가 유리수이고 $\sqrt{3}$이 무리수라는 사실에 근거한다. 이 조건이 없으면 실수해가 무수히 많다.
- 소문항 (ii)에서 $p^2 = -1$을 버리지 않거나, p와 q의 부호를 잘못 짝짓는 것. $pq = 1 - \sqrt{3} < 0$이므로 두 부호는 반대여야 한다.
- 소문항 (iii)에서 공식 전체를 2로 잘못 나누거나, 분모를 실수화하지 않고 $1 + \mathrm{i}$를 분모에 그대로 남겨 두는 것.

STEP 너머

소문항 (i)이 성립하는 것은 1과 $\sqrt{3}$이 $\mathbb{Q}$ 위에서 일차독립(linearly independent)이어서 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{r + s\sqrt{3}\}$이 유리수 위의 2차원 공간처럼 행동하기 때문이다. 소문항 (ii)는 같은 아이디어를 $\mathbb{R}$ 위의 1과 i에 적용한 것이다. 이것이 체의 확대(field extension)의 출발점이며, 대학 1학년 대수학 강의에서는 이를 갈루아(Galois) 이론으로 발전시켜 나간다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이 내용을 다루며, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 복소수 제곱근에 대한 아름다운 기하학적 관점을 보여 준다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.