풀이

STEP I 1996, 문제 4

순수수학 • 완전제곱식을 이용한 적분

> **STEP I 1996, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q4

핵심 아이디어

분모에 이차식이 있으면 완전제곱식(completing the square)으로 고친다: $x^2+2ax+1=(x+a)^2+(1-a^2)$. 모든 것은 $1-a^2$의 부호가 결정한다. 이 값이 양수이면 "제곱의 합"이 되어 역탄젠트(inverse tangent)가 나오고, 음수이면 제곱의 차가 되어 부분분수(partial fractions)로 분해되고 로그가 나온다. 실제로 손이 많이 가는 부분은 그다음에 답을 주어진 꼴로 정리하는 일이다.

풀이

이 풀이 전체에서 $[0,1]$에서의 적분을 I로 쓴다. 완전제곱식으로 고치면

$$x^2+2ax+1=(x+a)^2+1-a^2.$$

$|a|<1$인 경우

$b=\sqrt{1-a^2}>0$이라 하자. $u=x+a$로 두고 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+b^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{u}{b}$를 이용하면

$$I=\frac{1}{b}\left[\tan^{-1}\frac{x+a}{b}\right]_0^1=\frac{1}{b}(\alpha-\beta),\qquad \text{여기서 } \alpha=\tan^{-1}\frac{1+a}{b},\quad \beta=\tan^{-1}\frac{a}{b}.$$

(분모는 항상 $b^2>0$ 이상이므로 $[0,1]$에서 0이 되지 않고, 따라서 적분에는 아무 문제가 없다.) 하나의 역탄젠트로 나타내야 하므로 $\alpha-\beta$의 탄젠트를 구한다:

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1+a}{b}-\dfrac{a}{b}}{1+\dfrac{(1+a)a}{b^2}}=\frac{b}{b^2+a+a^2}=\frac{b}{1+a},$$

여기서 $b^2 + a^2 = 1$을 이용하였다. 끝으로

$$\frac{b}{1+a} = \frac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{1+a} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}},$$

이고, $1 + a > 0$이므로 이 식은 성립한다.

? 생각해 보기 $\tan(\alpha - \beta) = t$이면 정말로 $\alpha - \beta = \tan^{-1} t$인가?

$\alpha - \beta$가 $\tan^{-1}$의 치역인 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속할 때에만 그렇다. 따라서 이를 확인해야 한다. $(1+a)/b > 0$이므로 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이고, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\tan^{-1}$은 증가함수이고 $(1+a)/b > a/b$이므로 $\alpha > \beta$이다. 그러므로 $0 < \alpha - \beta < \pi$이다. 이 구간에서 tan이 양수인 곳은 $(0, \frac{\pi}{2})$뿐이고, 앞에서 $\tan(\alpha - \beta) > 0$임을 보였다. 따라서 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$이고

$$I = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \qquad (|a| < 1),$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

(더 깔끔한 관점: $a = \cos\varphi, 0 < \varphi < \pi$로 두면 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}, \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi$이므로 $\alpha - \beta = \frac{\varphi}{2}$이고, 실제로 $\sqrt{(1-\cos\varphi)/(1+\cos\varphi)} = \tan\frac{\varphi}{2}$이다.)

$|a| > 1$인 경우

$c = \sqrt{a^2 - 1} > 0$이라 하자. 이제 분모는 두 제곱의 차이다:

$$x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 - c^2 = (x + a - c)(x + a + c),$$

그리고 부분분수로 분해하면

$$\frac{1}{(x+a-c)(x+a+c)} = \frac{1}{2c}\left(\frac{1}{x+a-c} - \frac{1}{x+a+c}\right).$$

이차식의 두 근은 $-a \pm c$이다. 두 근의 곱은 1이고 합은 $-2a$이다.

먼저 $a > 1$이라 하자. 그러면 ($a^2 > a^2 - 1$이므로) $a > c$이고, 따라서 $x \geq 0$에서 $x + a - c$와 $x + a + c$는 모두 양수이다. 그러므로

$$I = \frac{1}{2c}\left[\ln\frac{x+a-c}{x+a+c}\right]_0^1 = \frac{1}{2c}\left(\ln\frac{1+a-c}{1+a+c} - \ln\frac{a-c}{a+c}\right).$$

$(a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = 1$을 이용하면 두 분수 모두 간단해진다:

- $(1+a-c)(a+c) = (a+c) + (a-c)(a+c) = 1 + a + c$이므로 $\dfrac{1+a-c}{1+a+c} = \dfrac{1}{a+c}$;
- $a - c = \dfrac{1}{a+c}$이므로 $\dfrac{a-c}{a+c} = \dfrac{1}{(a+c)^2}$.

따라서

$$I = \frac{1}{2c}\big(-\ln(a+c) + 2\ln(a+c)\big) = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\ln\big(a+\sqrt{a^2-1}\big),$$

이다. 이 경우 $a+\sqrt{a^2-1} > 0$이므로 그 절댓값과 같고, 이것이 주어진 결과이다.

$a < -1$이면 어떻게 될까? 이때 두 근 $-a \pm c = |a| \pm c$는 모두 양수이고 곱이 1이므로, 작은 근 $|a| - \sqrt{a^2-1}$은 0과 1 사이에 엄격하게 놓인다. 피적분함수(integrand)는 $[0,1]$ 안에 단순극(simple pole)을 가지며, 근 r 근처에서 상수 곱하기 $1/(x-r)$처럼 행동한다. 따라서 적분은 수렴(converge)하지 않고, 엄밀히 말하면 공식은 $a > 1$일 때에만 성립한다. ($\ln|\cdot|$를 써서 같은 부분분수 계산을 하면, 공식이 **코시 주요값**(*Cauchy principal value*), 즉 r 주위의 작은 대칭 구간을 빼고 적분한 값의 극한을 준다는 것을 알 수 있다. 문제에 절댓값 기호가 있는 이유가 바로 이것이다.)

검산

- $a = 0$: 적분은 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$이고, 공식은 $\tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$를 준다.
- $a = 2$: 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 0.380173이 나오고, 이는 $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})$과 일치한다.
- $a \to 1$일 때 두 경우 모두 $\frac{1}{2} = \int_0^1 (1+x)^{-2}\,\mathrm{d}x$로 수렴한다. 두 번째 경우는 c가 작을 때 $\ln(a+c) \approx c$이기 때문이고, 첫 번째 경우는 $\tan^{-1}t \approx t$이고 $\sqrt{(1-a)/(1+a)}/\sqrt{1-a^2} = 1/(1+a)$이기 때문이다.

흔한 실수

- 차가 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속하는지 확인하지 않고 $\tan^{-1}A - \tan^{-1}B = \tan^{-1}\frac{A-B}{1+AB}$라고 쓰는 것.
- $a < -1$이면 분모가 $[0,1]$ 안에서 0이 된다는 사실을 잊는 것.

STEP 너머

두 답은 사실 a에 대한 하나의 함수이다. 첫 번째 답에 $a = \cos\varphi$, 두 번째 답에 $a = \cosh t$를 대입하면 각각 $\varphi/(2\sin\varphi)$와 $t/(2\sinh t)$가 되고, 복소수를 이용하면($\cosh t = \cos(\mathrm{i}t)$) 한 쪽이 다른 쪽의 해석적 연속(analytic continuation)이다. $a < -1$일 때의 발산과 주요값을 통한 구제는 적분 경로 위에 있는 극(pole)을 복소해석학(complex analysis)이 어떻게 다루는지 처음 맛보는 경험이다. 이를 살펴보기에 좋은 책으로 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.