풀이

STEP I 1996, 문제 2

순수수학 • 베타 적분

> **STEP I 1996, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q2

핵심 아이디어

(i)과 (ii)의 피적분함수(integrand)는 같은 함수를 두 가지 방식으로 쓴 것이다: $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$. 따라서 하나의 적분을 두 가지 방법으로 계산하면 α에 대한 같은 다항식(polynomial)을 두 가지로 기술하게 된다. 소문항 (i)은 닫힌 형태(closed form)를 주고, 소문항 (ii)는 계수(coefficient)를 적분으로 나타내며, 나머지는 계수 비교가 해결한다. 부분적분(integration by parts)은 전혀 필요하지 않다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1 + (\alpha - 1)x$로 치환(substitution)하면 $\mathrm{d}u = (\alpha - 1)\,\mathrm{d}x$이다. $x = 0$일 때 $u = 1$이고, $x = 1$일 때 $u = \alpha$이다. $\alpha \neq 1$이므로 $\alpha - 1$로 나눌 수 있다:

$$\int_0^1 (1 + (\alpha - 1)x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha - 1}\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_1^\alpha = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. ($\alpha < 1$이거나 $\alpha < 0$이어도 이 치환은 문제없다. 치환이 일차식이고, $\int_1^\alpha u^n \,\mathrm{d}u$라는 식은 적분 구간의 끝이 어느 순서로 놓여 있든 성립하기 때문이다. 같은 이야기를 다르게 하면, 그냥 $(1 + (\alpha - 1)x)^{n+1}/((n+1)(\alpha - 1))$을 미분해 보면 된다.)

소문항 (ii)

αx와 $1 - x$를 두 항으로 보고 이항정리(binomial theorem)로 피적분함수를 전개한다:

$$(\alpha x + (1-x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha x)^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

이것은 유한합이므로 항별로 적분할 수 있다. x에 대한 적분에서 α는 상수이다:

$$\int_0^1 (\alpha x + (1-x))^n \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \left[\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x \right].$$

각 대괄호 안의 값은 α에 의존하지 않는 수이므로, 이것은 차수가 n 이하인 α에 대한 다항식이고, $0 \le k \le n$일 때 α^k의 계수는 $\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x$이다. 이로써 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (iii)

(ii)의 다항식을 $P(\alpha)$라 하자. $\alpha x + (1-x) = 1 + (\alpha - 1)x$이므로, 소문항 (i)에 의해 $\alpha \neq 1$인 모든 α에 대하여

$$P(\alpha) = \frac{\alpha^{n+1} - 1}{(n+1)(\alpha - 1)} = \frac{1}{n+1}(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n),$$

이다. 여기서 등비급수(geometric series)의 인수분해 $\alpha^{n+1} - 1 = (\alpha - 1)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^n)$을 이용하였다.

> **생각해 보기** 우리가 아는 것은 두 다항식이 $\alpha \neq 1$에서 일치한다는 것뿐이다. 그런데도 왜 계수를 비교해도 되는가?

양변의 차는 차수가 n 이하인 다항식이고 $\alpha \neq 1$인 모든 α에서 0이 되므로, 근(root)을 무수히 많이 가진다. 차수가 n 이하인 영이 아닌 다항식은 근을 많아야 n개 가지므로, 그 차는 영다항식이다. 즉 모든 계수가 일치한다. (다른 방법으로, 양변이 모두 연속(continuous)이므로 $\alpha = 1$에서도 일치한다.)

우변에서 $0 \le k \le n$인 α^k의 계수는 모두 $\frac{1}{n+1}$이다. 이를 (ii)와 비교하면

$$\binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

이고, 따라서

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)\,n!} = \frac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!},$$

이다. 이것이 요구된 결과이다.

검산

- $k = 0$: $\int_0^1 (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$이고, 공식은 $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$을 준다.
- $n = 2, k = 1$: $\int_0^1 (x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = \frac{1!\,1!}{3!}$.

- 수치적으로 $\int_0^1 x^2(1-x)^3\,\mathrm{d}x \approx 0.016667 = \frac{1}{60} = \frac{2!3!}{6!}$이다. 무작위로 고른 α와 n에 대해 (i)을 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 확인하였고, $0 \le k \le n \le 12$인 모든 경우에 대해 (iii)을 정확히 확인하였다.
- 흥미로운 결과: P의 계수가 모두 같으므로 $\int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$는 k에 의존하지 않는다.

흔한 실수

- (i)이 $\alpha \neq 1$인 경우에만 증명되었다는 점을 언급하지 않고 계수를 비교하는 것. 다항식(또는 연속성)에 관한 한 문장이면 이 빈틈을 메울 수 있다.
- (ii)에서 $(1+(\alpha-1)x)^n$을 $(\alpha-1)$의 거듭제곱으로 전개하는 것. 그렇게 하면 올바른 다항식을 얻기는 하지만 α의 거듭제곱으로 나타나지 않는다. 대신 $\big(\alpha x + (1-x)\big)^n$을 전개하라.

STEP 너머

적분 $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$는 오일러(Euler)의 **베타 함수**(beta function) $B(a,b)$이고, 여기서 얻은 결과는 $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$의 정수인 경우이다. 확률로 말하면, p를 $[0,1]$에서 균등하게(uniformly) 고른 다음 앞면이 나올 확률이 p인 동전 n개를 던지면, 앞면의 개수가 0부터 n까지 각각 확률 $\frac{1}{n+1}$로 똑같이 나타난다는 뜻이다(이것이 바로 "모든 계수가 같다"는 말의 의미이다). 이는 베이즈(Bayes)의 유명한 논문의 출발점이기도 하다. Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 이 뒤에 있는 베타 분포와 감마 분포를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.