풀이

STEP I 1996, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP I 1996, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

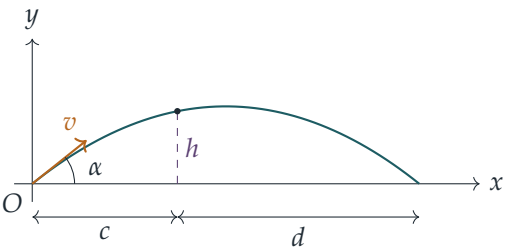
step.maths.org/questions/96-s1-q11

핵심 아이디어

포사체(projectile)의 경로는 포물선(parabola)이고, 우리는 이 경로가 지면과 만나는 두 점 $x = 0$과 $x = c + d$를 모두 알고 있다. 이차식(quadratic)은 상수배 하나를 제외하면 근(root)에 의해 완전히 결정되므로, 궤적(trajectory)은 어떤 k에 대하여 $y = kx(c + d - x)$ 꼴이어야 한다. 점 (c, h)가 k를 결정하고, 이것을 표준 궤적 방정식과 비교하면 k가 $\tan\alpha$로, 다시 v^2으로 바뀐다.

풀이

입자를 중력만 받으며(공기 저항(air resistance)은 없음) 자유롭게 움직이는 질점(point mass)으로 모형화하고, O를 원점으로, x축을 운동 방향의 수평 방향으로, y축을 연직 위쪽으로 잡는다. 수평 도달 거리(range)를 $R = c + d$, 그리고 $T = \tan\alpha$로 둔다.



발사각

처음 속도의 성분이 $v\cos\alpha$와 $v\sin\alpha$이므로, 시간 t 후의 위치는 $x = vt\cos\alpha$, $y = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$이다. $t = x/(v\cos\alpha)$를 대입하여 t를 소거하면 궤적은

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}.$$

이다. 입자는 $x = R$에서 착지하므로 그곳에서 $y = 0$이다. $R \neq 0$이므로 R로 나눌 수 있고,

$$\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha} = \frac{\tan\alpha}{R}. \qquad (*)$$

을 얻는다. 이것을 궤적의 식에 다시 대입하면

$$y = Tx - \frac{Tx^2}{R} = \frac{Tx(R-x)}{R}.$$

이다.

> **생각해 보기** 점 (c,h)를 사용하기 전에 $g/(2v^2\cos^2\alpha)$를 바꾸어 놓는 것이 왜 유리할까?

$(*)$를 쓰면 v가 완전히 사라지고, 미지수가 T 하나뿐인 방정식이 남기 때문이다. 기하적으로 보면, 포물선을 두 근 0과 R이 드러나도록 인수분해된 꼴로 쓴 것이다. 이제 점 (c,h)가 경로 위에 있고 $R - c = d$이므로

$$h = \frac{Tcd}{c+d}, \qquad \text{즉,} \qquad \tan\alpha = \frac{h(c+d)}{cd},$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

발사 속력

$(*)$를 정리하고 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$를 이용하면

$$v^2 = \frac{gR}{2T\cos^2\alpha} = \frac{gR(1+T^2)}{2T} = \frac{g}{2}\left(\frac{R}{T} + RT\right).$$

이다. 첫 번째 결과로부터 $\frac{R}{T} = \frac{cd}{h}$이고 $RT = \frac{(c+d)^2h}{cd}$이다. 따라서

$$v^2 = \frac{g}{2}\left(\frac{cd}{h} + \frac{(c+d)^2h}{cd}\right),$$

이고, 이로써 문제가 해결된다.

검산

- 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)에 의해 $\frac{R}{T} + RT \geq 2R$이므로 $v^2 \geq gR$이고, 등호는 정확히 $T = 1$일 때 성립한다. 이는 주어진 속력에서 최대 도달 거리가 v^2/g이고 45°에서 얻어진다는 잘 알려진 사실과 일치한다.
- 점 (c, h)가 비행의 최고점이면 $c = d$이고 $\tan\alpha = 2h/c$이다. 이는 최고 높이가 도달 거리의 4분의 1에 $\tan\alpha$를 곱한 값이라는 표준 결과와 일치한다.
- 수치적으로 $g = 9.81$, $c = 3$, $d = 5$, $h = 2$로 두면 공식에서 $\tan\alpha = \frac{16}{15}$와 $v^2 \approx 78.64$를 얻는다. 작은 시간 간격으로 운동을 단계별로 진행시켜 보면, 입자는 $x = 3$에서 높이 2.000을 지나고 $x = 8.000$에서 착지한다.

흔한 실수

- 궤적 방정식에서 $\cos^2\alpha$를 빠뜨리거나, $\sec^2\alpha$를 $1 + \tan^2\alpha$ 대신 $1 + \tan\alpha$로 바꾸는 실수.
- "$x = c$에서 높이 h"와 "$x = c + d$에서 높이 0"이라는 두 방정식을 v와 α에 대하여 직접 풀려는 것. 이 방법도 통하지만, $(*)$를 이용해 먼저 v를 소거하는 것보다 계산이 훨씬 무겁다.

STEP 너머

이차식을 근을 이용해 쓰는 기법은 큰 아이디어의 작은 사례이다. 다항식(polynomial)은 상수배를 제외하면 영점에 의해 결정되며, 이는 보간(interpolation)과 복소수 위에서의 인수정리(factor theorem)로 이어진다. 역학에서는 v를 고정하고 α를 변화시키면 포물선들의 족이 생기는데, 그 포락선(envelope)이 포사체가 도달할 수 있는 모든 점의 경계인 "안전 포물선(parabola of safety)"이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 포사체 운동과 그 확장(공기 저항 포함)을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.