풀이

STEP I 1996, 문제 10

역학 • 운동량 보존

> **STEP I 1996, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q10

핵심 아이디어

사용할 보존 법칙은 두 가지이다. 운동량(momentum)이 보존되고(폭발 전에는 0이었다), 폭발 후의 운동 에너지(kinetic energy)는 E이다. 질량이 어떻게 나뉘는지만 알면 이 두 조건이 두 속력을 모두 결정하므로, 상대 속력(relative speed)은 질량을 나누는 방식의 함수가 된다. 그러면 이를 최소화하는 일은 하나의 부등식으로 귀결되고, $m_1 + m_2$가 고정되어 있으므로 산술-기하 평균 부등식(AM–GM inequality)이 자연스러운 도구이다.

풀이

두 조각을 입자로 모형화하고, 폭발 중에 잃는 질량이 없어서 $m_1 + m_2 = M$이라 가정하며, 폭발하는 동안 외력이 작용하지 않는다고 가정한다.



운동량. 우주선은 정지 상태에서 출발하므로 폭발 전의 전체 운동량은 0이고, 따라서 폭발 후에도 0이다. 두 운동량 $m_1\mathbf{v}_1$과 $m_2\mathbf{v}_2$는 서로 상쇄되어야 하므로, 두 조각은 한 직선을 따라 정확히 반대 방향으로 움직이고,

$$m_1 v_1 = m_2 v_2 = p,$$

라 하자. 여기서 $p > 0$는 공통인 운동량의 크기이다. 두 조각이 반대 방향으로 움직이므로 상대 속력은 실제로 $v_1 + v_2$이다.

에너지. 폭발 후의 운동 에너지는 모두 폭발에서 나오므로

$$E = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} = \frac{p^2(m_1+m_2)}{2m_1m_2} = \frac{p^2M}{2m_1m_2}.$$

따라서 $p^2 = \dfrac{2Em_1m_2}{M}$이다.

상대 속력. $v_1 = p/m_1$과 $v_2 = p/m_2$를 이용하면

$$v_1 + v_2 = p\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{pM}{m_1m_2},$$

이므로

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{p^2M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2Em_1m_2}{M}\cdot\frac{M^2}{m_1^2m_2^2} = \frac{2EM}{m_1m_2}.$$

생각해 보기 E와 M은 고정되어 있다. 우리가 자유롭게 바꿀 수 있는 것으로 남은 유일한 것은 무엇이고, 그것을 어느 쪽으로 바꾸고 싶은가?

바꿀 수 있는 것은 질량을 나누는 방식뿐이고, v_1+v_2를 가능한 한 작게 하려면 $m_1+m_2 = M$이라는 조건 아래에서 곱 m_1m_2를 가능한 한 크게 해야 한다. 산술-기하 평균 부등식에 의하여(두 질량은 모두 양수이다)

$$m_1m_2 \le \left(\frac{m_1+m_2}{2}\right)^2 = \frac{M^2}{4},$$

이고, 등호는 정확히 $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}M$일 때 성립한다. (같은 말로, $m_1m_2 = \frac{1}{4}M^2 - \frac{1}{4}(m_1 - m_2)^2$이다.) 그러므로

$$(v_1+v_2)^2 = \frac{2EM}{m_1m_2} \ge \frac{2EM}{M^2/4} = \frac{8E}{M},$$

이고, 속력은 음이 아니므로 양변에 제곱근을 취할 수 있다.

$$v_1 + v_2 \ge \left(\frac{8E}{M}\right)^{1/2}.$$

이 하한은 우주선이 똑같은 두 반쪽으로 나뉠 때 도달되며, 이때 각 조각은 속력 $\sqrt{2E/M}$으로 움직인다. 따라서 가능한 상대 속력의 최솟값은 요구한 대로 $(8E/M)^{1/2}$이다.

검산

- 똑같은 두 반쪽: 각 조각의 운동 에너지는 $\frac{1}{2}E = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Mv^2$이므로 $v = \sqrt{2E/M}$이고 $2v = \sqrt{8E/M}$이 되어 하한과 일치한다.

- 극단적인 분할: $m_1 \to 0$이면 $m_1 m_2 \to 0$이고 상대 속력은 한없이 커진다. 에너지의 일부를 나누어 가진 아주 작은 조각은 매우 빠르게 움직여야 하므로 이는 타당하다.
- 단위: E/M의 단위는 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$이므로 그 제곱근은 속력이다.
- 수치적으로, $M = 7$, $E = 3$으로 두고 m_1을 $(0, 7)$ 위에서 훑어 보면 $m_1 = 3.5$에서 상대 속력의 최솟값 $1.85164\ldots$를 얻고, 이는 $\sqrt{24/7} = 1.85164\ldots$와 일치한다.

흔한 실수

- 두 조각이 왜 반대 방향으로 움직이는지 말하지 않는 것. 바로 그 사실 때문에 상대 속력이 $|v_1 - v_2|$가 아니라 $v_1 + v_2$가 된다.
- $m_1 + m_2 = M$을 이용하지 않고 m_1에 대하여 최소화하는 것. 이 제약 조건이 문제를 일차원 문제로 만들어 준다.
- $(8E/M)^{1/2}$이 하한이라는 것만 보이고, 그 값이 실제로 ($m_1 = m_2$일 때) 도달된다는 점을 언급하지 않는 것.

STEP 너머

이것은 질량 중심 좌표계(centre-of-mass frame)에서 다루는 가장 간단한 예이다. 그 좌표계에서 두 물체로의 분열은 언제나 크기가 같고 방향이 반대인 운동량을 만들어 내며, 운동에너지는 $p^2/(2\mu)$이다. 여기서 $\mu = m_1 m_2/M$은 **환산 질량**(*reduced mass*)이다. 이 문제에서는 $(v_1 + v_2)^2 = 2E/\mu$이고, 환산 질량은 두 질량이 같을 때 가장 크다. 같은 아이디어가 원자핵 붕괴와 이체 궤도의 바탕에 깔려 있으며, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)에서 이를 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.