풀이

STEP I 1996, 문제 1

순수수학 • 원기둥의 최적화

> **STEP I 1996, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/96-s1-q1

핵심 아이디어

깡통은 두 양, 즉 반지름 r와 높이 h로 정해진다. 부피 제약 조건(constraint)을 이용하면 둘 중 하나를 없앨 수 있으므로 S는 r만의 함수가 되고, 보통의 미분(differentiation)으로 최소화할 수 있다. 최적의 깡통은 매우 깔끔한 모양을 가진다는 것이 밝혀진다. 그 모양을 알고 나면, 구에 관한 두 질문은 모두 축을 지나는 단면(cross-section) 하나만 살펴보는 문제로 귀결된다.

풀이

겉넓이 최소화하기

깡통의 반지름을 $r > 0$, 높이를 $h > 0$이라 하자. 그러면

$$V = \pi r^2 h, \qquad S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

이다. 여기서 $2\pi r^2$은 두 밑면에서, $2\pi rh$는 곡면인 옆면에서 나온다. V가 고정되어 있으면 $h = V/(\pi r^2)$이므로 $2\pi rh = 2V/r$이고

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}, \qquad r > 0.$$

이다. 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

이다. 이 값은 $r^3 < V/(2\pi)$일 때 음수이고 $r^3 > V/(2\pi)$일 때 양수이다. 따라서 S는 감소하다가 증가하며, $r > 0$에서의 최솟값은

$$r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

일 때 나타난다. 이것은 단지 극소(local minimum)가 아니라 전역 최솟값(global minimum)이다. 이 점이 유일한 정류점(stationary point)이고, 그곳에서 도함수(derivative)의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀌기 때문이다. (식으로부터도 알 수 있다. $r \to 0^+$일 때와 $r \to \infty$일 때 모두 $S \to \infty$이다.)

이 반지름에서 $V = 2\pi r^3$이므로

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = 2r.$$

이다. 가장 좋은 깡통은 높이와 폭이 정확히 같다. 이때 $2V/r = 4\pi r^2$이므로

$$\begin{aligned} S &= 2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 6\pi r^2 = 6\pi \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3} \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (2\pi)^{-2/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi)^{1/3} V^{2/3} = 3\,(2\pi V^2)^{1/3}, \end{aligned}$$

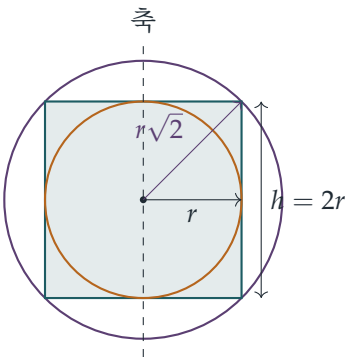
이고, 이것이 구하는 최솟값이다.

? **생각해 보기** 왜 h가 아니라 r를 변수로 삼을까?

어느 변수를 써도 된다. 하지만 h를 소거하는 편이 더 쉽다. h는 두 공식 모두에 일차로만 나타나므로, $h = V/(\pi r^2)$을 대입하면 r에 관한 간단한 함수가 된다. r를 소거하면 $\sqrt{V/(\pi h)}$가 등장하여 계산이 더 복잡해진다.

깡통 안에 들어가는 가장 큰 구

이제부터 깡통은 $h = 2r$이다. 축을 지나는 평면으로 깡통을 자르면 단면은 $2r \times 2r$ 정사각형이다.



깡통 안에 들어가는 구는 모두 반지름이 $\rho \le r$이다. 이를 확인하려면 구를 밑면의 평면에 정사영(projection)해 보자. 그러면 반지름 r인 밑면 원판 안에 놓인 반지름 ρ인 원판이 생긴다. 또한 $2\rho \le h = 2r$이므로 같은 상계를 얻는다. 깡통의 중심을 중심으로 하는 반지름 r인 구(단면에서 호박색 원)는 두 밑면과 옆면에 모두 접하므로 깡통 안에 들어간다.

$r^3 = V/(2\pi)$를 이용하면, 가장 큰 구의 부피는

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \tfrac{2}{3}V,$$

이고, 이것이 보이려던 결과이다.

깡통을 담는 가장 작은 구

윗면 테두리 위의 한 점과, 아랫면 테두리 위에서 그와 지름 방향으로 반대편에 있는 점을 잡자. 이 두 점은 정사각형 단면의 마주 보는 꼭짓점이므로 두 점 사이의 거리는

$$\sqrt{(2r)^2 + h^2} = \sqrt{8r^2} = 2\sqrt{2}\,r.$$

이다. 깡통을 담는 구는 이 두 점을 모두 포함하므로, 그 지름은 적어도 $2\sqrt{2}\,r$이고 반지름은 적어도 $\sqrt{2}\,r$이다.

? **생각해 보기** 반지름 $\sqrt{2}\,r$인 구가 실제로 충분히 크다는 것은 어떻게 알 수 있을까?

구의 중심을 깡통의 중심 O에 두자. 깡통의 임의의 점은 축으로부터 거리 $\rho \le r$에 있고, O보다 높이 z만큼 위 또는 아래에 있으며 $|z| \le r$이다. 따라서 O로부터의 거리는 $\sqrt{\rho^2 + z^2} \le \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2}\,r$이다. 그러므로 깡통 전체가 이 구 안에 놓인다(자주색 원은 정사각형의 네 꼭짓점을 모두 지난다).

따라서 깡통이 들어가는 가장 작은 구의 반지름은 $\sqrt{2}\,r$이고, 부피는

$$\tfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,r\right)^3 = \tfrac{4}{3}\pi \cdot 2\sqrt{2}\,r^3 = \tfrac{8\sqrt{2}}{3}\pi \cdot \frac{V}{2\pi} = \frac{4\sqrt{2}}{3}V.$$

이다.

검산

- $V = 1$일 때 촘촘한 r 격자 위에서 $2\pi r^2 + 2/r$을 직접 최소화하면 $S \approx 5.5358$을 얻으며, 이는 $3(2\pi)^{1/3} \approx 5.5358$과 일치한다.
- 두 구의 부피의 비는 반지름의 비의 세제곱인 $(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$여야 한다. 실제로 $\frac{4\sqrt{2}}{3}V / \frac{2}{3}V = 2\sqrt{2}$이다.
- 크기 순서도 타당하다. $\frac{2}{3}V < V < \frac{4\sqrt{2}}{3}V \approx 1.886\,V$이므로 안쪽 구는 깡통보다 작고 바깥쪽 구는 깡통보다 크다.

흔한 실수

- 밑면 하나 또는 둘을 모두 빠뜨려 $S = \pi r^2 + 2\pi rh$나 $S = 2\pi rh$로 쓰는 것. 그러면 다른 최적 모양이 나온다.

- $\mathrm{d}S/\mathrm{d}r = 0$임을 보이고, 그 정류점이 왜 최솟값인지는 말하지 않는 것.
- 바깥쪽 구의 반지름을 깡통의 공간 대각선(space diagonal)의 절반이 아니라 r나 h로 잡는 것.

STEP 너머

이것은 제약 최적화(constrained optimisation) 문제이다. 즉 $V(r,h)$가 고정되어 있다는 조건 아래에서 $S(r,h)$를 최소화하는 것이다. 대학에서는 변수를 소거하지 않고 이런 문제를 다루는 라그랑주(Lagrange) 승수법(Lagrange multipliers)을 배우게 된다. 조건 $\nabla S = \lambda \nabla V$로부터 거의 곧바로 $h = 2r$을 얻는다. 또한 두 구는 볼록체(convex body)의 "내접구(inscribed ball)"와 "외접구(circumscribed ball)"를 보여 주는 예인데, 이들은 볼록 기하학(convex geometry)에서 핵심적인 개념이다. 이런 성격의 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.