풀이

STEP III 1995, 문제 9

역학 • 복합 진자

STEP III 1995, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

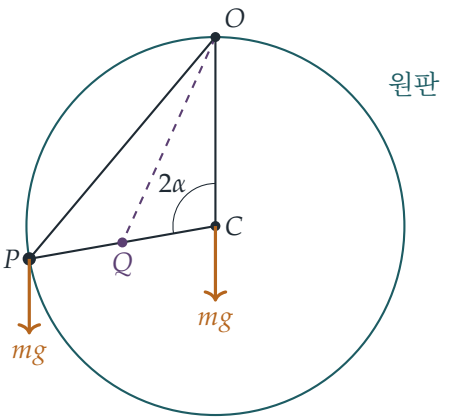
step.maths.org/questions/95-s3-q9

핵심 아이디어

원판과 입자는 질량이 **같으므로**, 계 전체의 질량중심(centre of mass)은 CP의 중점 Q이다. 거의 모든 것이 이 사실에서 나온다. 안정 평형(stable equilibrium)에서는 Q가 O의 바로 아래에 있고, 소문항 (iii)의 에너지 방정식에는 Q의 높이만 있으면 된다. 나머지는 이등변 삼각형(isosceles triangle) OCP의 기하와 표준적인 관성 모멘트(moment of inertia) 적분이다.

풀이

원판을 강체 박판(rigid lamina)으로, P를 그 둘레에 고정된 입자로 모형화한다. 회전축은 매끄러우므로 역학적 에너지(mechanical energy)가 보존된다. 풀이 전체에서 $OC = CP = r$이고 $\angle OCP = 2\alpha$이다.



소문항 (i)

원판(질량중심 C)과 입자(P에 위치)의 질량이 모두 m이므로, 계의 질량중심은 CP의 중점 Q이다. 작용하는 힘은 중력과 회전축에서의 반작용뿐이므로, 계는 Q가 O와 같은 연직선 위에 있을 때 정확히 평형을 이루고, Q가 O보다 **아래**에 있을 때 그 평형은 안정하다(이때 어떤 변위든 Q를 들어 올려 퍼텐셜 에너지(potential energy)를 증가시킨다). 따라서 안정 평형에서 OQ는 연직이고, β는 각 $\angle COQ$이다.

원판의 평면에서 원점을 C로, O를 $(r,0)$으로 하는 좌표축을 잡자. 그러면 $P = r(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$이고 $Q = \frac{r}{2}(\cos 2\alpha, \sin 2\alpha)$이다. 따라서

$$\overrightarrow{OC} = (-r,\, 0), \qquad \overrightarrow{OQ} = \tfrac{r}{2}(-(2-\cos 2\alpha),\ \sin 2\alpha).$$

$2 - \cos 2\alpha > 0$이므로 벡터 $\overrightarrow{OQ}$는 $\overrightarrow{OC}$ 방향으로 양의 성분 $\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)$를, 그에 수직인 방향으로 성분 $\frac{r}{2}\sin 2\alpha$를 가진다. 그러므로 β는 예각이고

$$\tan\beta = \frac{\frac{r}{2}\sin 2\alpha}{\frac{r}{2}(2-\cos 2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2-\cos 2\alpha},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

소문항 (ii)

$\rho x/r$를 단위 넓이당 질량으로 본다. 반지름 x와 $x + \mathrm{d}x$ 사이의 고리의 넓이는 $2\pi x\,\mathrm{d}x$이므로

$$m = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^2}{3}.$$

이 고리의 모든 점은 C를 지나고 원판에 수직인 축으로부터 거리 x에 있으므로, 그 축에 대한 관성 모멘트는

$$I_C = \int_0^r \frac{\rho x}{r}\, 2\pi x \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\rho r^4}{5} = \frac{3}{5}mr^2,$$

이다. 여기서 $2\pi\rho r^2 = 3m$을 이용하였다. O를 지나는 축은 이 축과 평행하고(둘 다 원판이 놓인 연직 평면에 수직이다) 거리 $OC = r$만큼 떨어져 있으므로, 평행축 정리(parallel axis theorem)에 의해

$$I_O = \frac{3}{5}mr^2 + mr^2 = \frac{8}{5}mr^2.$$

소문항 (iii)

계의 관성 모멘트. 삼각형 OCP는 꼭지각(apex angle)이 2α인 이등변삼각형이므로, 현(chord)의 길이는 $OP = 2r\sin\alpha$이다. 입자는 $m(2r\sin\alpha)^2$을 더하므로

$$I = \frac{8}{5}mr^2 + 4mr^2\sin^2\alpha = \frac{4}{5}mr^2\,(2 + 5\sin^2\alpha).$$

질량중심이 내려간 거리. 놓는 순간 OQ는 수평이므로 Q는 O와 같은 높이에 있다. 마지막 위치에서는 P가 O의 바로 아래에 있으므로 OP가 연직이고, 어떤 점이 O보다 아래에 있는 깊이는 OP를 따라 O로부터 잰 거리와 같다.

- P의 깊이는 $OP = 2r\sin\alpha$이다.
- 삼각형 OCP의 밑각(base angle)은 $\frac{1}{2}(\pi - 2\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha$이므로 $\angle COP = \frac{\pi}{2} - \alpha$이고, C의 깊이는 $r\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = r\sin\alpha$이다.

Q는 CP의 중점이므로 그 깊이는 두 깊이의 평균인 $\frac{3}{2}r\sin\alpha$이다. 따라서 계(전체 질량 $2m$)가 잃은 퍼텐셜 에너지는 $2mg\cdot\frac{3}{2}r\sin\alpha = 3mgr\sin\alpha$이다.

> ? **생각해 보기** 계는 실제로 P가 O의 아래에 오는 위치에 도달하는가?

Q가 O와 같은 높이에 있는 상태에서 정지 상태로 놓으면, 계는 복합 진자(compound pendulum)처럼 OQ가 수평인 두 위치 사이를 흔들리며, Q가 O의 높이보다 아래에 있는 모든 위치를 지난다. 마지막 위치에서 Q의 깊이는 $\frac{3}{2}r\sin\alpha > 0$이므로 이 위치에 도달한다(그리고 처음에 C가 P보다 낮다는 조건은 흔들리는 방향을 정해 줄 뿐이다).

에너지. 정지 상태에서 출발하므로, 각속력(angular speed)을 ω라 하면

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = 3mgr\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{6gr\sin\alpha}{\frac{4}{5}r^2(2+5\sin^2\alpha)} = \frac{15g\sin\alpha}{2r(2+5\sin^2\alpha)}.$$

C는 O를 중심으로 반지름 $OC = r$인 원 위를 움직이므로 $v = r\omega$이고

$$v^2 = \frac{15gr\sin\alpha}{2(2+5\sin^2\alpha)},$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

최댓값. $s = \sin\alpha$라 하자. $0 < \alpha \le \pi/2$이므로 $s \in (0,1]$이다. $f(s) = \dfrac{s}{2+5s^2}$라 하면

$$f'(s) = \frac{(2+5s^2) - 10s^2}{(2+5s^2)^2} = \frac{2-5s^2}{(2+5s^2)^2},$$

이고, 이는 $s < \sqrt{2/5}$에서 양수, $s > \sqrt{2/5}$에서 음수이다. $\sqrt{2/5} < 1$은 허용 범위 안에 있으므로 f는 그곳에서 최댓값 $f = \dfrac{\sqrt{2/5}}{4} = \dfrac{\sqrt{10}}{20}$을 가진다. 따라서

$$v_{\max}^2 = \frac{15gr}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{8}\,gr \approx 1.19\,gr, \qquad \text{단, } \sin\alpha = \sqrt{2/5}.$$

검산

- $\alpha \to 0$이면 P는 O에 놓이고 원판만 OC가 연직이 되도록 매달린다. 실제로 $\tan\beta \to 0$이다. $\alpha = \pi/2$이면 P는 O의 정반대편에 있고, Q는 OC 위에 있으므로 역시 $\beta = 0$이다.

- $\alpha = \pi/2$일 때: $I = \frac{28}{5}mr^2$이고, 질량 $2m$이 $\frac{3}{2}r$만큼 내려가므로 $v^2 = r^2 \cdot 3mgr \cdot \frac{10}{28mr^2} = \frac{15}{14}gr$이며, 공식과 일치한다.
- 여러 α에 대해 놓는 위치에서부터 운동 방정식을 수치적으로(RK4) 적분하였다. 예를 들어 $\alpha = 0.7$, $r = 1.3$, $g = 9.81$일 때 시뮬레이션은 $v^2 = 15.1206$을 주며, 이는 공식과 유효숫자 여섯 자리까지 일치한다. 직접 탐색으로도 최댓값 $3\sqrt{10}/8 \approx 1.1859$($gr$ 단위)가 확인된다.

흔한 실수

- I_C로 균일한 원판의 값 $\frac{1}{2}mr^2$을 쓰는 것. 여기서는 밀도(density)가 바깥쪽으로 갈수록 커지므로 I_C가 $\frac{3}{5}mr^2$으로 커진다.
- 소문항 (iii)에서 관성 모멘트에 대한 입자의 기여 $m \cdot OP^2$을 빠뜨리는 것.
- v^2 대신 ω^2을 답하는 것. 문제는 C의 속력을 묻고 있으며, 그것은 $r\omega$이다.

STEP 너머

수평축을 중심으로 회전하는 강체(rigid body)를 **복합 진자**라 한다. 이는 추가 질량중심에 있는 단진자(simple pendulum)처럼 행동하지만, 관성이 Md^2 대신 I이다. 소문항 (i)의 평형 근처에서의 미소 진동의 주기는 $2\pi\sqrt{I/(Mgd)}$이고(여기서 $d = OQ$), "등가 단진자" 길이 $I/(Md)$는 한때 g를 정밀하게 측정하는 데 쓰였던 케이터(Kater)의 가역 진자(reversible pendulum)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 강체의 회전과 평행축 정리를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.