풀이

STEP III 1995, 문제 8

순수수학 • 평면과 구

> **STEP III 1995, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q8

핵심 아이디어

평면(plane)이 구(sphere)를 자르면 그 단면으로 생기는 원의 중심은 구의 중심에서 평면에 내린 수선의 발(foot of the perpendicular)이다. 따라서 구의 중심은 각 원의 중심을 지나는 법선(normal line) 위에 있어야 하고, 각 법선을 따라 잰 거리는 피타고라스(Pythagoras) 정리에 의해 구의 반지름과 연결된다. 문제의 나머지 부분은 모두 이 하나의 벡터 방정식에 잘 고른 벡터를 내적(dot product)하는 일이다.

풀이

법선과 거리

X를 지나는 π의 법선은 $\mathbf{x}$를 지나고 방향이 $\mathbf{n}$인 직선이다.

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + t\,\mathbf{n}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

이 직선은 $(\mathbf{x} + t\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = p$인 곳, 즉 ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$이므로) $t = p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$인 곳에서 π와 만난다. 따라서 수선의 발은 $\mathbf{x} + (p - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$이고, $\mathbf{n}$이 단위벡터(unit vector)이므로 X에서 π까지의 수직 거리는 다음과 같다.

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - p|.$$

두 원을 모두 지나는 구

중심이 $\mathbf{c}$이고 반지름이 R인 구가 두 원을 모두 포함한다고 하자. i를 하나 고정한다. C_i 위의 모든 점 $\mathbf{y}$는 $|\mathbf{y} - \mathbf{r}_i| = 1$과 $(\mathbf{y} - \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}_i = 0$을 만족한다. $\mathbf{y}$가 C_i를 한 바퀴 돌면, 벡터 $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{r}_i$는 $\mathbf{n}_i$에 수직인 모든 단위벡터를 거친다.

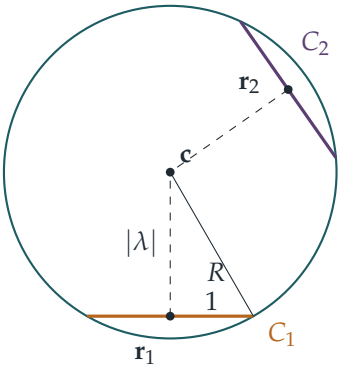
$\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_i$가 되도록 $\mathbf{c} - \mathbf{r}_i = \mathbf{a} + \mu_i \mathbf{n}_i$로 분해한다. 그러면 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}_i = 0$을 이용하여

$$\begin{aligned} R^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{c}|^2 &= |\mathbf{u} - \mathbf{a} - \mu_i \mathbf{n}_i|^2 \\ &= 1 - 2\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + |\mathbf{a}|^2 + \mu_i^2, \end{aligned}$$

를 얻는다. 좌변은 C_i의 모든 점에서 같으므로, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}$는 허용되는 모든 $\mathbf{u}$에 대해 같은 값을 가진다. 그런데 $\mathbf{u}$가 허용되면 $-\mathbf{u}$도 허용되므로, 평면 안의 모든 단위벡터 $\mathbf{u}$에 대해 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$이다. ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$이라면) $\mathbf{u}$를 $\mathbf{a}$와 평행하게 고르면 모순이 생긴다. 따라서 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$이고

$$\mathbf{c} = \mathbf{r}_i + \mu_i \mathbf{n}_i, \qquad R^2 = 1 + \mu_i^2.$$

이다. 말로 하면, 구의 중심은 C_i의 중심을 지나는 π_i의 법선 위에 있으며, 이것은 바로 첫 부분에서 구한 직선이다.



이를 $i = 1$과 $i = 2$에 적용하면 $1 + \mu_1^2 = R^2 = 1 + \mu_2^2$이므로 $\mu_2 = \pm\mu_1$이다. $\lambda = \mu_1$로 두면

$$\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{c} = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2,$$

이므로, 조건에 맞는 구가 존재하면 이러한 λ가 반드시 존재한다. 이것으로 증명이 끝난다.

두 필요조건

식을 정리하면

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = -\lambda \mathbf{n}_1 \pm \lambda \mathbf{n}_2.$$

이다. 여기에 $\mathbf{n}_1$과 $\mathbf{n}_2$ 모두에 수직인 $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$를 내적하면

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) = 0.$$

을 얻는다.

? **생각해 보기** p_1은 어디에서 나오는가? 벡터 방정식에는 나타나지 않는다.

중심 $\mathbf{r}_1$은 π_1 위에 있으므로 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$이고, 마찬가지로 $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_2 = p_2$이다. $k = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$로 두자. $\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_2 \pm \lambda \mathbf{n}_2$에 $\mathbf{n}_1$을, 이어서 $\mathbf{n}_2$를 내적하면

$$p_1 + \lambda = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \pm \lambda k,$$
$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 + \lambda k = p_2 \pm \lambda.$$

이다. 따라서

$$p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2 = \lambda(\pm k - 1), \qquad p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = \lambda(k \mp 1).$$

이다. 위쪽 부호를 택하면 두 우변은 모두 $\lambda(k-1)$이고, 아래쪽 부호를 택하면 각각 $-\lambda(k+1)$과 $\lambda(k+1)$이다. 어느 경우든 두 좌변은 같거나 부호만 반대이므로

$$(p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1)^2.$$

이다.

기하학적 의미

첫째 조건. 이 조건은 $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$가 한 평면 위에 있다(coplanar)는 것, 즉 스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0이라는 뜻이다. 이는 C_1의 중심을 지나는 π_1의 법선과 C_2의 중심을 지나는 π_2의 법선이 한 평면 위에 있다는 것과 같다. 즉 두 법선은 꼬인 위치(skew)에 있지 않으므로, (구의 중심에서) 만나거나 평행하다.

둘째 조건. 첫 부분에 의해 $|p_1 - \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$는 C_2의 중심에서 π_1까지의 거리이고, $|p_2 - \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r}_1|$는 C_1의 중심에서 π_2까지의 거리이다. 따라서 이 조건은 두 거리가 같다는 것, 즉 한 원의 중심이 다른 원의 평면에서 떨어진 거리가 다른 원의 중심이 이 원의 평면에서 떨어진 거리와 같다는 뜻이다. 이는 그림의 대칭성을 반영한다. 두 원은 모두 $\mathbf{c}$에서 같은 거리 $|\lambda|$만큼 떨어져 있으므로, $\mathbf{c}$를 지나는 적당한 평면에 대한 반사(reflection)가 두 원을 서로 바꾸고, 두 거리도 서로 바꾼다.

검산

- $\pi_1 : z = 0$과 $\pi_2 : z = 2$를 택하고, 중심이 z축 위에 있는 단위원을 생각하자. 두 원은 중심이 $(0,0,1)$이고 반지름이 $\sqrt{2}$인 구 위에 있다. 이때 아래쪽 부호로 $\lambda = 1$이고, $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$이며, 둘째 조건의 두 거리는 모두 2이다.
- 수치적으로, 반지름이 $R > 1$인 무작위 구 5000개를 만들고 각각을 단위원으로 자르는 무작위 평면 두 개를 잡았다. 모든 원 위의 점이 구 위에 있음을 확인하였고, 모든 경우에 두 조건이 10^{-9} 이내의 오차로 성립하였으며, 두 부호가 모두 나타났다. 서로 관계없는 무작위 원 쌍은 매번 첫째 조건을 만족하지 않았다.

흔한 실수

- 구의 중심이 $\mathbf{r}_i$를 지나는 법선 위에 있다는 것을 근거 없이 가정하는 것. 이것이 증명의 핵심이다.
- $\pm$를 잊는 것. 구의 중심은 두 평면에 대해 법선이 가리키는 쪽과 같은 쪽에 있을 수도 있고, 반대쪽에 있을 수도 있다.
- C_1의 중심이 π_1 위에 있으므로 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r}_1 = p_1$이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

여기서 얻은 조건은 필요조건(necessary condition)일 뿐이다. 완전한 "필요충분조건(if and only if)"을 얻으려면 두 법선이 실제로 두 원에서 같은 거리에 있는 한 점에서 만난다는 것도 필요하다. 이런 문제는 이차곡면(quadric)의 해석기하학(analytic geometry)으로 들어가는 첫걸음이다. 그곳에서는 평면, 구와 그 교선을 선형대수학(linear algebra)으로 다루며, 스칼라 삼중곱은 부피를 재는 3×3 행렬식(determinant)으로 다시 등장한다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이러한 내용을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.