풀이

STEP III 1995, 문제 6

순수수학 • 자취와 반전

> **STEP III 1995, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q6

핵심 아이디어

원 $|z-\mathrm{i}|=1$은 원점을 지나므로, 극형식(polar form)으로 나타낸 방정식이 특히 간단하다. 즉 절댓값(modulus)이 편각(argument)의 삼각함수 하나로 표현된다. z를 절댓값–편각 형식으로 나타내고 나면 $1/z$는 곧바로 얻어지며(절댓값의 역수(reciprocal)를 취하고 편각의 부호를 바꾸면 된다), 이를 직교 형식(Cartesian form)으로 쓰면 원이 직선이 되었음을 알 수 있다. 마지막 부분은 같은 현상을 거꾸로 따라가는 것이며, $w=x+\mathrm{i}y$로 놓고 직접 계산하는 것이 가장 빠르다.

풀이

z의 절댓값

$r>0$에 대하여 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$라 하자. 그러면 $z-\mathrm{i}=r\cos\theta+\mathrm{i}(r\sin\theta-1)$이므로

$$\begin{aligned}|z-\mathrm{i}|^2=1 &\iff r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-2r\sin\theta+1=1\\ &\iff r^2-2r\sin\theta=0\\ &\iff r=2\sin\theta,\end{aligned}$$

이다. 마지막 단계에서는 r로 나누었는데, $z\neq 0$이므로 이는 허용된다. 따라서

$$|z|=2\sin\theta.$$

$r>0$이므로 $\sin\theta>0$이어야 하고, 따라서 $0<\theta<\pi$이다. 즉 (중심이 i이고 반지름이 1인) 원은 상반평면(upper half-plane)에 놓여 있으며 실수축과는 원점에서만 접하는데, 원점은 제외된다. 역으로 모든 $\theta\in(0,\pi)$는 원 위의 점 $z=2\sin\theta\,(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$를 주므로, θ가 $(0,\pi)$ 전체를 움직일 때 z는 원점을 제외한 원 전체를 그린다.

생각해 보기 그림에서 $|z| = 2\sin\theta$가 "당연한" 이유는 무엇인가?

0에서 2i까지의 선분은 원의 지름(diameter)이다. 반원에 대한 원주각(angle in a semicircle)의 성질에 의해 세 꼭짓점이 $0, z, 2\mathrm{i}$인 삼각형은 z에서 직각이고, 0에서의 각은 $\frac{\pi}{2} - \theta$이다. 따라서 $|z| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2\sin\theta$이다.

$1/z$의 절댓값과 편각

$z = 2\sin\theta\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$이므로

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2\sin\theta}(\cos(-\theta) + \mathrm{i}\sin(-\theta)),$$

이고, 따라서

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}, \qquad \arg\frac{1}{z} = -\theta.$$

$0 < \theta < \pi$이므로 각 $-\theta$는 $(-\pi, 0)$에 속하고, 따라서 이것이 주편각(principal argument)이다.

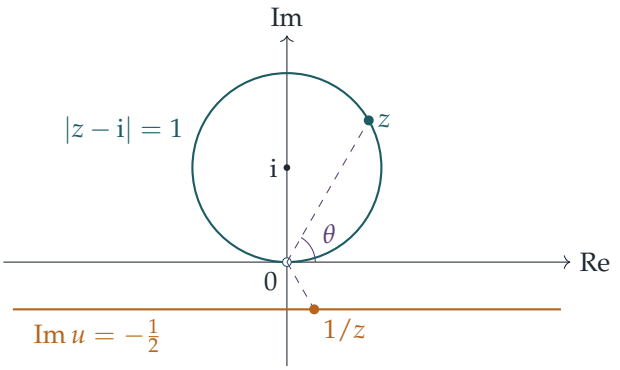
자취

$1/z$가 그리는 자취(locus)를 알아보기 위해 직교 형식으로 바꾸면

$$\frac{1}{z} = \frac{\cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta}{2\sin\theta} = \tfrac{1}{2}\cot\theta - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}.$$

허수부는 항상 $-\frac{1}{2}$이고, θ가 $(0, \pi)$ 전체를 움직일 때 실수부 $\frac{1}{2}\cot\theta$는 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취한다($+\infty$에서 $-\infty$까지 감소한다). 따라서 $1/z$는 직선 $\mathrm{Im}\,u = -\frac{1}{2}$ **전체**를 그린다.

정리하면 z는 중심이 i이고 반지름이 1인 원(원점 제외) 위에 있고, $1/z$는 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$를 지나는 수평선 위에 있다. 아래 그림은 두 자취와 함께 $\theta = \frac{\pi}{3}$일 때의 두 점을 보여 준다. 이때 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$이고 $1/z = \frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$이다. 두 점은 각각 각 θ와 $-\theta$의 반직선 위에 있으며, 0으로부터의 두 거리를 곱하면 1이다. z가 원점에 가까워지면 $1/z$는 직선을 따라 무한히 멀어지고, 원의 꼭대기 $z = 2\mathrm{i}$는 직선 위에서 원점에 가장 가까운 점 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}$로 옮겨진다.



자취 C

$w=x+\mathrm{i}y\neq 0$이라 하자($1/w$가 존재하려면 $w\neq 0$이어야 한다). 그러면

$$\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{|w|^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2},\qquad \text{따라서}\qquad \mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

그러므로 $w\neq 0$일 때

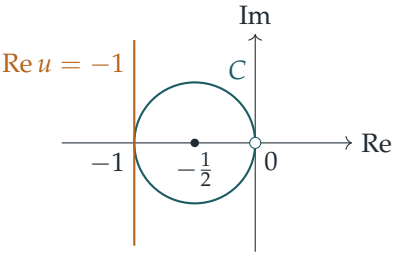
$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{1}{w}=-1 &\iff x=-(x^2+y^2)\\ &\iff x^2+x+y^2=0\\ &\iff (x+\tfrac{1}{2})^2+y^2=\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

모든 단계는 거꾸로 갈 수 있으므로(0이 아닌 x^2+y^2를 곱했다), 이것은 진정한 "필요충분조건"이다. 따라서 C는 원

$$|w+\tfrac{1}{2}|=\tfrac{1}{2},$$

즉 중심이 $-\frac{1}{2}$이고 반지름이 $\frac{1}{2}$인 원에서 **원점을 제외한 것**이다. 원점은 이 원 위에 있지만, 그곳에서 $1/w$가 정의되지 않으므로 C에 속하지 않는다.

이는 앞부분과 짝을 이룬다. 앞에서는 0을 지나는 원이 $z\mapsto 1/z$에 의해 0을 지나지 않는 직선으로 옮겨졌고, 여기서는 직선 $\mathrm{Re}\,u=-1$이 같은 사상(이 사상은 자기 자신의 역사상이다)에 의해 0을 지나는 원으로 옮겨진다.



검산

- $\theta = \frac{\pi}{6}$으로 놓으면 $|z| = 1$이고 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$이며, 실제로 $|z - \mathrm{i}| = |\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}| = 1$이다. 이 수의 역수는 켤레복소수(conjugate) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i} \approx 0.866 - 0.5\mathrm{i}$이고, 예측한 대로 허수부가 $-\frac{1}{2}$이다.
- $\theta = \frac{\pi}{2}$이면 원의 꼭대기 $z = 2\mathrm{i}$를 얻고, $1/z = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$이다.
- C의 경우: $w = -1$은 원 위에 있고 $1/w = -1$이다. $w = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$는 원 위에 있고 $1/w = -1 - \mathrm{i}$이며, 실수부는 -1이다.

각 자취 위의 임의의 점 10 000개로 수치 검사를 하여 세 결과를 모두 확인하였다.

흔한 실수

- 범위 $0 < \theta < \pi$를 빠뜨리는 것. 식 $|z| = 2\sin\theta$는 $\sin\theta > 0$인 곳에서만 의미가 있다.
- $1/z$의 자취를 반직선이나 선분으로 기술하는 것. $\cot\theta$는 $(0, \pi)$에서 모든 실숫값을 취하므로 자취는 직선 전체이다.
- 원점을 C에 포함하는 것. 원점은 원의 방정식을 만족하지만 그곳에서 $1/w$는 존재하지 않는다.

STEP 너머

사상 $z \mapsto 1/z$는 뫼비우스 변환(Möbius transformation) $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$의 한 예이다. 이 사상들에 관한 핵심적인 사실은 이들이 "일반화된 원(generalised circle)"(원과 직선)을 일반화된 원으로 옮긴다는 것이며, $1/z$가 직선으로 옮기는 원은 정확히 원점을 지나는 원들이다. 이것은 리만(Riemann) 구(Riemann sphere)의 기하학의 출발점이며, 리만 구 위에서 직선은 무한원점을 지나는 원일 뿐이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 모든 내용을 그림과 함께 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.