풀이

STEP III 1995, 문제 5

순수수학 • 매클로린 급수

> **STEP III 1995, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q5

핵심 아이디어

$\theta = \sin^{-1} x$로 두면 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = 1/\sqrt{1-x^2}$이다. $y^{(1)}$에 $\sqrt{1-x^2}$를 곱하면 이 성가신 인수가 상쇄되고, 한 번 더 미분하면 제곱근이 전혀 없는 2계 미분방정식(second-order differential equation)을 얻는다. 그다음 라이프니츠(Leibniz) 규칙으로 이 방정식을 점화식(recurrence)으로 바꾸면, $x = 0$에서 인수 $1 - x^2$는 1이 되고 x가 들어 있는 항은 사라진다. 그러면 점화식이 0에서의 모든 도함수 값을 알려 준다.

풀이

미분방정식

$\theta = \sin^{-1} x$라 하면 $\sin\theta = x$이고, $|x| < 1$일 때 $\cos\theta = \sqrt{1-x^2} > 0$이며 $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$이다. 그러면 $y = \sin^2 m\theta$이고, 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$y^{(1)} = 2m \sin m\theta \cos m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m \sin 2m\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{따라서} \qquad \sqrt{1-x^2}\, y^{(1)} = m \sin 2m\theta.$$

이 식을 x에 대하여 미분하되, 좌변에는 곱의 미분법(product rule)을 쓴다:

$$\sqrt{1-x^2}\, y^{(2)} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, y^{(1)} = 2m^2 \cos 2m\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

양변에 $\sqrt{1-x^2}$를 곱하고 $\cos 2m\theta = 1 - 2\sin^2 m\theta = 1 - 2y$를 이용하면

$$(1-x^2)\, y^{(2)} = x\, y^{(1)} + 2m^2(1-2y),$$

이것이 구하는 방정식이다.

? **생각해 보기** 왜 $\sqrt{1-x^2}\,y^{(1)} = m\sin 2m\theta$를 먼저 제곱하지 않는가?

제곱하면 $(1-x^2)(y^{(1)})^2 = 4m^2y(1-y)$가 되고, 이를 미분하면 모든 항에 인수 $2y^{(1)}$가 남는다. 그러면 $y^{(1)}$로 나누어야 하는데, 이 값은 나중에 우리가 관심을 두는 바로 그 점인 $x=0$에서 0이다. 제곱하기 전에 미분하면 나눗셈을 아예 피할 수 있다.

점화식

$n \geq 1$에 대하여 라이프니츠 규칙을 써서 방정식을 n번 미분한다. $1-x^2$는 0이 아닌 도함수가 두 개($-2x$와 -2)뿐이고 x는 하나뿐이므로

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-x^2)y^{(2)}\right] &= (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[x\,y^{(1)}\right] &= x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)},\\ \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[2m^2(1-2y)\right] &= -4m^2\,y^{(n)}.\end{aligned}$$

마지막 줄은 $n \geq 1$이어야 성립하는데, 그래야만 상수 $2m^2$가 미분되어 0이 되기 때문이다. 양변을 같게 놓으면

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)} - 4m^2y^{(n)},$$

이고, 항을 정리하면($xy^{(n+1)}$가 $2n+1$개, 그리고 $n(n-1)+n = n^2$)

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} = (2n+1)\,x\,y^{(n+1)} + (n^2-4m^2)\,y^{(n)} \qquad (n \geq 1),$$

이 되어 구하는 점화식을 얻는다.

매클로린 급수

$x=0$에서 $\theta = 0$이므로

$$y(0) = \sin^2 0 = 0, \qquad y^{(1)}(0) = m\sin 0 = 0, \qquad y^{(2)}(0) = 0 + 2m^2(1-0) = 2m^2,$$

이며, 마지막 값은 미분방정식에서 얻는다. 점화식에 $x=0$을 대입하면

$$y^{(n+2)}(0) = (n^2-4m^2)\,y^{(n)}(0) \qquad (n \geq 1).$$

홀수 번째 도함수. $y^{(1)}(0) = 0$이므로 점화식에 의해 $y^{(3)}(0) = 0$, 이어서 $y^{(5)}(0) = 0$이고, 이와 같이 계속된다. 즉 모든 홀수 번째 도함수는 0에서 값이 0이다. y가 x에 대한 우함수(even function)이므로 이는 당연하다.

짝수 번째 도함수. $n = 2j$로 두면

$$y^{(2j+2)}(0) = (4j^2-4m^2)\,y^{(2j)}(0) = -4(m^2-j^2)\,y^{(2j)}(0) \qquad (j \geq 1).$$

$y^{(2)}(0) = 2m^2$에서 시작하여 $j = 1, 2, \ldots, k-1$에 대해 이 식을 차례로 적용하면

$$y^{(2k)}(0) = 2m^2 \prod_{j=1}^{k-1}(-4(m^2 - j^2)) = (-1)^{k-1}\, 2^{2k-1} \prod_{j=0}^{k-1}(m^2 - j^2),$$

이고, 여기서 맨 앞의 m^2를 $j = 0$인 인수로 흡수하였다. ($k = 1$이면 이 공식은 마땅히 $2m^2$를 준다.)

따라서 매클로린 급수(Maclaurin series)는

$$y = \sin^2(m \sin^{-1} x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, 2^{2k-1}}{(2k)!}\, m^2(m^2 - 1^2)(m^2 - 2^2) \cdots (m^2 - (k-1)^2)\, x^{2k},$$

이고, 처음 몇 항은

$$y = m^2 x^2 - \frac{m^2(m^2-1)}{3}\, x^4 + \frac{2m^2(m^2-1)(m^2-4)}{45}\, x^6 - \cdots.$$

m이 정수이면 $k > |m|$인 모든 항이 인수 $m^2 - m^2 = 0$을 포함하므로 급수가 끝나고, y는 $2|m|$차 다항식이 된다.

검산

- $m = 1$: $y = \sin^2(\sin^{-1} x) = x^2$이고, 급수도 x^2 다음에는 0만 나온다. $m = 2$: 급수는 $4x^2 - 4x^4$를 주며, 실제로 $\sin^2 2\theta = 4 \sin^2\theta(1 - \sin^2\theta) = 4x^2 - 4x^4$이다.
- $m = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$: $y = \sin^2(\pi/12) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0.066987$이다. 급수는 $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^6 + \cdots$이고, 처음 세 항의 합은 0.066895이며, 항을 더할수록 차이가 줄어든다.
- 임의의 x와 m에서 미분방정식이 성립하는지, 급수의 계수가 이 방정식을 정확히 만족하는지, 그리고 $|x| \le 0.8$에서 급수(300항까지)가 y와 약 10^{-15} 이내로 일치하는지를 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- $n = 0$일 때 점화식을 쓰는 것. 점화식은 $n \ge 1$일 때만 성립하는데, $n = 0$이면 상수 $2m^2$가 살아남기 때문이다. $n = 0$인 경우는 원래 방정식이며, 우리는 바로 이것으로 $y^{(2)}(0) = 2m^2$를 얻었다.
- 라이프니츠 계수를 틀리는 것: 항 $-n(n-1)y^{(n)}$은 $\binom{n}{2} \cdot (-2x)$가 아니라 $\binom{n}{2} \cdot (-2)$에서 나온다.
- 일반항을 쓸 때 교대 부호를 빠뜨리는 것. 각 단계에서 $4(j^2 - m^2)$를 곱하는데, 이는 $m^2 > j^2$일 때 음수이다.

STEP 너머

도함수로 만든 매클로린 급수가 원래 함수와 같지 않을 수도 있지만, 여기서는 $|x| < 1$에서 같다. 이 급수의 수렴반지름(radius of convergence)은 1이고(m이 정수가 아닐 때 비율 판정법(ratio test)으로 확인된다), $\sin^{-1} x$는 $x = \pm 1$에서 더 이상 좋은 성질을 갖지 않는다. 정수 m에 대해 얻는 다항식들은 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)의 친척인데, $\cos 2m\theta$가 $\sin\theta$에 대한 다항식이기 때문이다. 이러한 급수가 왜 실제로 원래 함수로 수렴하는지 알고 싶다면 Abbott의 *Understanding Analysis*에서 나머지항이 있는 테일러 정리(Taylor's theorem with remainder)를 읽어 보라. Needham의 *Visual Complex Analysis*는 수렴반지름이 왜 ± 1에서의 문제로 정해지는지 설명한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.