풀이

STEP III 1995, 문제 4

순수수학 • 삼각급수의 합

> **STEP III 1995, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q4

핵심 아이디어

코사인의 합은 복소지수(complex exponential)의 합의 실수부(real part)이고, $\sum e^{\mathrm{i}k\theta}$는 등비급수(geometric series)이다. 이 급수를 합한 뒤 분자와 분모에서 "반각(half-angle)" 인수 $e^{\mathrm{i}\theta/2}$를 묶어 내면 다루기 불편한 $e^{\mathrm{i}m\theta}-1$ 꼴의 항들이 사인으로 바뀌는데, 분모의 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$는 바로 여기에서 나온다. 부등식에서는 $\mathrm{C}_n(\theta)$를 $\frac{1}{2}$이 눈에 보이게 떨어져 나오도록 고쳐 쓰는 것이 요령이다.

풀이

합 C_n과 S_n

$z=e^{\mathrm{i}\theta}$로 놓는다. $0<\theta<2\pi$이므로 $z\neq 1$이고, 따라서 등비급수의 합 공식을 쓸 수 있다.

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n}e^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{e^{\mathrm{i}\theta}-1}.$$

이제 분자에는 ($\phi=(n+1)\theta$로 놓고) 분모에는 ($\phi=\theta$로 놓고) $e^{\mathrm{i}\phi}-1=e^{\mathrm{i}\phi/2}(e^{\mathrm{i}\phi/2}-e^{-\mathrm{i}\phi/2})=2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\phi/2}\sin(\frac{1}{2}\phi)$를 적용하면 다음을 얻는다.

$$\mathrm{C}_n(\theta)+\mathrm{i}\,\mathrm{S}_n(\theta)=\frac{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}(n+1)\theta/2}\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{2\mathrm{i}\,e^{\mathrm{i}\theta/2}\sin(\frac{1}{2}\theta)}=e^{\mathrm{i}n\theta/2}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

$0<\frac{1}{2}\theta<\pi$이므로 분모는 0이 아니다. 분수 부분은 실수이므로 ($e^{\mathrm{i}n\theta/2}=\cos\frac{1}{2}n\theta+\mathrm{i}\sin\frac{1}{2}n\theta$를 이용하여) 실수부와 허수부(imaginary part)를 비교하면

$$\mathrm{C}_n(\theta)=\frac{\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)},\qquad \mathrm{S}_n(\theta)=\frac{\sin(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

첫 번째 식이 구하려던 결과이고, 두 번째 식은 이에 대응하는 S_n의 식이다.

생각해 보기 복소수를 쓰지 않고 이 결과를 알아낼 방법이 있을까?

있다. 각 항에 $2\sin(\frac{1}{2}\theta)$를 곱하고 곱을 합으로 바꾸는 공식(product-to-sum formula)

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\cos k\theta = \sin((k+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin((k-\tfrac{1}{2})\theta)$$

를 쓰면 된다. $k=0$부터 n까지 더하면 마지막 항과 첫 항을 제외한 모든 항이 연쇄적으로 소거(telescoping)된다.

$$2\sin(\tfrac{1}{2}\theta)\,C_n(\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) - \sin(-\tfrac{1}{2}\theta) = \sin((n+\tfrac{1}{2})\theta) + \sin(\tfrac{1}{2}\theta). \qquad (*)$$

합을 곱으로 바꾸는 공식(sum-to-product formula) $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$에 $A=(n+\frac{1}{2})\theta$, $B=\frac{1}{2}\theta$를 대입하면 우변은 $2\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta)\cos(\frac{1}{2}n\theta)$가 되어, 앞에서 구한 결과와 일치한다.

부등식

식 $(*)$가 바로 우리가 원하는 꼴이다. 양변을 $2\sin(\frac{1}{2}\theta) \neq 0$으로 나누면

$$C_n(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}.$$

(주어진 공식에서 출발하는 경우에는 $2\cos(\frac{1}{2}n\theta)\sin(\frac{1}{2}(n+1)\theta) = \sin((n+\frac{1}{2})\theta) + \sin(\frac{1}{2}\theta)$를 이용하면 같은 식을 얻는다.) 따라서

$$\left|C_n(\theta) - \frac{1}{2}\right| = \frac{|\sin((n+\frac{1}{2})\theta)|}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)} \leq \frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}\theta)}$$

이다. 여기서 $0 < \theta < 2\pi$일 때 $\sin(\frac{1}{2}\theta) > 0$이라는 사실(그래서 분모에는 절댓값(modulus)이 필요 없다)과 $|\sin x| \leq 1$을 이용하였다. 이것이 구하려던 부등식이며, 등호는 정확히 $\sin((n+\frac{1}{2})\theta) = \pm 1$일 때 성립한다.

생각해 보기 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$가 양수라는 사실은 왜 중요한가?

만약 θ가 $(0, 2\pi)$ 밖의 값을 가질 수 있다면 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$가 음수가 될 수 있고, 그러면 부등식의 우변이 음수가 되는데, 이는 절댓값에 대해서는 불가능하다. 주어진 범위에서는 $\frac{1}{2}\theta \in (0, \pi)$이므로 이 상한은 진짜 양수이다.

검산

- $n=1$: $C_1 = 1+\cos\theta = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$이고, 공식은 $\cos(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta) = 2\cos^2(\frac{1}{2}\theta)$를 준다. 마찬가지로 $S_1 = \sin\theta$는 $\sin(\frac{1}{2}\theta)\sin\theta/\sin(\frac{1}{2}\theta)$와 일치한다.

- $\theta \to 0$일 때 C_n의 공식은 $(n+1)$로 수렴(converge)하는데, 이는 1을 $n+1$개 더한 값이다. 상한 $1/(2\sin\frac{1}{2}\theta)$는 당연히 발산한다.
- 수치로 확인해 보면, $n=3, \theta=1$일 때 직접 더한 값은 $C_3(1) \approx 0.1342$로 공식과 일치하고, $|C_3 - \frac{1}{2}| \approx 0.366 \leq 1/(2\sin\frac{1}{2}) \approx 1.043$이다. 등호는 예를 들어 $n=2, \theta=\pi/5$일 때 성립하며, 이때 양변은 모두 1.618…이다.

흔한 실수

- 합이 $k=0$부터 시작하므로 항이 $n+1$개라는 사실을 잊는 것: 등비급수의 분자에는 $e^{in\theta}$가 아니라 $e^{i(n+1)\theta}$가 온다.
- 분모를 먼저 실수로 만들지 않고 $\left(e^{i(n+1)\theta}-1\right)/\left(e^{i\theta}-1\right)$의 실수부를 구하려는 것: 반각을 이용한 인수분해가 이 일을 깔끔하게 해 준다.
- $|\sin(\frac{1}{2}\theta)|$라고 써 놓고 그것이 왜 $\sin(\frac{1}{2}\theta)$와 같은지 설명하지 않는 것.

STEP 너머

함수 $C_n(\theta) - \frac{1}{2} = \sin\left((n+\frac{1}{2})\theta\right)/\left(2\sin\frac{1}{2}\theta\right)$는 상수배를 제외하면 **디리클레 핵**(*Dirichlet kernel*)으로, 푸리에 급수(Fourier series) 이론의 중심 대상이다. 어떤 함수의 n번째 푸리에 부분합(partial sum)은 이 핵에 대한 그 함수의 평균이다. 여기서 증명한 상한은 분자의 진동과 함께, 푸리에 급수가 언제 수렴하는지를 증명하는 출발점이 된다(또한 $\sum\cos(k\theta)/k$ 같은 급수에 대한 디리클레(Dirichlet) 판정법(Dirichlet's test)의 출발점이기도 하다). Abbott의 *Understanding Analysis*에는 바로 이 합들을 사용하는, 읽기 쉬운 푸리에 급수 장이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.