풀이

STEP III 1995, 문제 3

순수수학 • 감쇠 조화 운동

> **STEP III 1995, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q3

핵심 아이디어

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$를 시도해 보자. 그러면 미분방정식(differential equation)은 λ에 대한 이차방정식이 되고, 세 가지 경우는 그 판별식(discriminant)이 가질 수 있는 세 가지 가능성(서로 다른 두 실근, 중근, 복소근)에 불과하다. 감쇠(damped)가 있는 경우, 정류점(stationary point)은 반주기라는 같은 시간 간격마다 돌아오고, 그런 각 구간에서 진동하는 인수는 부호만 바뀌는 반면 지수 인수는 같은 비율로 줄어든다. 연이은 극값의 비가 일정한 이유가 바로 이것이다.

풀이

$x = \mathrm{e}^{\lambda t}$를 대입하면 특성방정식(auxiliary equation)

$$\lambda^2 + 2k\lambda + 1 = 0, \qquad \lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$$

을 얻는다. 이하에서 A와 B는 임의의 상수이다.

소문항 (i): $k > 1$

근이 서로 다른 두 실근이므로

$$x = A\,\mathrm{e}^{(-k+\sqrt{k^2-1})\,t} + B\,\mathrm{e}^{(-k-\sqrt{k^2-1})\,t}$$

이다. ($\sqrt{k^2-1} < k$이므로 두 지수는 모두 음수이다. 이것이 진동이 없는 과감쇠(overdamping)이다.)

소문항 (ii): $k = 1$

특성방정식은 $(\lambda+1)^2 = 0$이고, 중근 $\lambda = -1$을 가진다. 두 번째 독립인 해는 $t\,\mathrm{e}^{-t}$이므로

$$x = (A + Bt)\,\mathrm{e}^{-t}$$

이다. (확인: $x = t\mathrm{e}^{-t}$이면 $x' = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$이고 $x'' = (t-2)\mathrm{e}^{-t}$이며, $(t-2) + 2(1-t) + t = 0$이다.)

소문항 (iii): $0 < k < 1$

이제 $k^2 - 1 < 0$이므로 근은 $\lambda = -k \pm \mathrm{i}\omega$이고, 여기서

$$\omega = \sqrt{1-k^2} > 0.$$

$\mathrm{e}^{(-k\pm\mathrm{i}\omega)t}$의 실수 결합을 취하면

$$x = \mathrm{e}^{-kt}(A\cos\omega t + B\sin\omega t).$$

연이은 극값

$x(0) = 0$이려면 $A = 0$이어야 하므로 $x = B\,\mathrm{e}^{-kt}\sin\omega t$이고, $B \neq 0$이다(그렇지 않으면 $x \equiv 0$이 되어 극대도 극소도 없다). 미분하면

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}(\omega\cos\omega t - k\sin\omega t).$$

$k^2 + \omega^2 = 1$이므로 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$인 각으로 $k = \sin\varphi$, $\omega = \cos\varphi$라 쓸 수 있고, 그러면

$$\omega\cos\omega t - k\sin\omega t = \cos(\omega t + \varphi).$$

따라서 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B\,\mathrm{e}^{-kt}\cos(\omega t + \varphi)$이고, 이는 $\omega t + \varphi$가 $\frac{\pi}{2}$의 홀수 배일 때 정확히 0이 되며, 그러한 각 시각에서 부호가 바뀐다. 그러므로 ($t > 0$에서의) 정류점은

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\omega}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

에 있고, π/ω의 같은 간격으로 놓여 있다. 또한 각 정류점에서 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$의 부호가 바뀌므로 이들은 실제로 극대(maximum)와 극소(minimum)가 번갈아 나타나는 점이다.

생각해 보기 t_1을 명시적으로 구하지 않고 $x(t_{n+1})$을 $x(t_n)$과 어떻게 비교할 수 있을까?

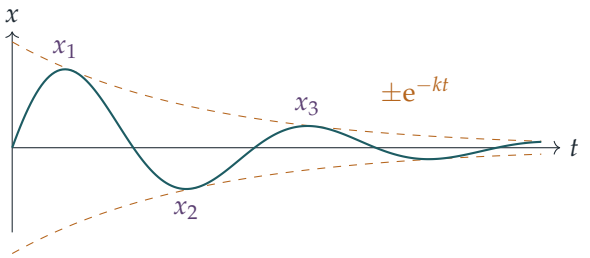
시간을 π/ω만큼 진행하면 ωt에 π가 더해지고, $\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$이다. 따라서

$$x_{n+1} = B\,\mathrm{e}^{-k(t_n+\pi/\omega)}\sin(\omega t_n + \pi) = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,B\,\mathrm{e}^{-kt_n}\sin\omega t_n = -\,\mathrm{e}^{-k\pi/\omega}\,x_n.$$

또한 $x_n \neq 0$이다. $\sin \omega t_n = 0$이면 $\cos \omega t_n = \pm 1$이어야 하고, 그러면 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \pm B\omega \, \mathrm{e}^{-kt_n} \neq 0$이 되기 때문이다. 그러므로

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \alpha, \qquad \text{여기서} \alpha = \mathrm{e}^{-k\pi/\omega} = \exp\left(-\frac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}} \right),$$

이고, 이는 요구한 대로 n에 의존하지 않는다. (음의 부호는 극대와 극소가 번갈아 나타남을 확인해 준다.)



k^2에 대한 공식

로그를 취하면 $\ln \alpha = -\dfrac{k\pi}{\sqrt{1-k^2}}$이므로

$$(\ln \alpha)^2 = \frac{k^2\pi^2}{1-k^2} \implies (\ln \alpha)^2 - k^2(\ln \alpha)^2 = k^2\pi^2 \implies k^2 = \frac{(\ln \alpha)^2}{\pi^2 + (\ln \alpha)^2},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

검산

- $k \to 0$(감쇠 없음)일 때 $\alpha \to 1$이고 $\ln \alpha \to 0$이므로, 공식은 마땅히 그래야 하듯 $k^2 \to 0$을 준다. 이때 극값은 모두 같은 크기를 가진다.
- $k \to 1^-$일 때 $\alpha \to 0$이고 $(\ln \alpha)^2 \to \infty$이므로 $k^2 \to 1$이다. 임계 감쇠(critical damping)에서는 운동이 더 이상 되돌아오지 않는다.
- 수치적으로, $k = 0.5$이고 $x(0) = 0$일 때 방정식을 단계별로 진행시켜 보면 연이은 극값의 비가 0.163034로 나오며, 이는 $\mathrm{e}^{-0.5\pi/\sqrt{0.75}} \approx 0.163034$와 일치한다. 그리고 $(\ln \alpha)^2/(\pi^2 + (\ln \alpha)^2) = 0.25 = k^2$이다.

흔한 실수

- 극대와 그다음 극소 사이의 시간을 반주기 π/ω가 아니라 한 주기 전체 $2\pi/\omega$로 잡는 실수. 이렇게 하면 α 대신 α^2을 얻게 된다.

- 극값이 $\sin \omega t = \pm 1$인 곳에서 생긴다고 생각하는 실수. 그렇지 않다. 감쇠하는 인수 때문에 극값은 더 이른 시각, 즉 $\tan \omega t = \omega / k$인 곳으로 옮겨진다. 위의 논증은 극값의 정확한 위치는 전혀 필요로 하지 않고, 그 간격만 필요로 한다.

STEP 너머

양 $-\ln \alpha$를 **대수 감쇠율**(logarithmic decrement)이라 한다. 공학자들은 기록된 진동으로부터 이 값을 측정하고, 이 문제의 공식은 그것을 감쇠 k로 바꾸어 준다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 과감쇠, 임계 감쇠, 부족 감쇠(underdamping)를 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.