풀이

STEP III 1995, 문제 2

순수수학 • 점화 공식

> **STEP III 1995, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q2

핵심 아이디어

인수 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{a-x}$는 모두 치환(substitution) $x = a\sin^2\theta$를 떠올리게 한다. 이 치환은 두 인수를 동시에 $\sqrt{a}\sin\theta$와 $\sqrt{a}\cos\theta$로 바꾸어 준다. (I_0에 대해서는 깔끔한 기하학적 지름길도 있다.) 점화식(reduction formula)을 얻으려면 x의 거듭제곱이 하나 줄어들도록 부분적분(integration by parts)을 한다. 그러면 $a-x$의 거듭제곱이 하나 늘어나는데, 이것을 다시 $a-x$를 이용해 쪼갠다. 그러면 I_n 자신이 다시 나타나므로 같은 항끼리 모을 수 있다.

전체에 걸쳐 $a > 0$이다.

풀이

I_0 구하기

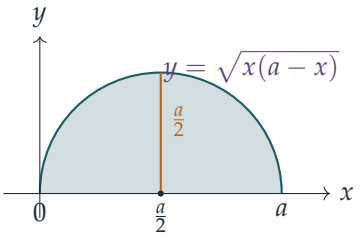
$\mathrm{I}_0 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$를 구해야 한다. $x = a\sin^2\theta$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$이다. x가 0에서 a까지 변할 때 θ는 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지 변하고, 이 범위에서 $\sin\theta, \cos\theta \geq 0$이다. 따라서 부호 문제 없이 $\sqrt{x} = \sqrt{a}\sin\theta$이고 $\sqrt{a-x} = \sqrt{a}\cos\theta$이다. 그러면

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_0 &= \int_0^{\pi/2} (\sqrt{a}\sin\theta)(\sqrt{a}\cos\theta)\,2a\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2a^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\int_0^{\pi/2}(1-\cos 4\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi a^2}{8},\end{aligned}$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. 여기서 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$와 $\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 4\theta)$를 이용했고, $\cos 4\theta$를 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 적분하면 0이 된다.

그림으로 보기. $y = \sqrt{x(a-x)}$라 하면 $y^2 = ax - x^2$이고, 이를 정리하면 $y \geq 0$인 $(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$이 된다. 따라서 I_0은 반지름이 $\frac{a}{2}$인 반원(semicircle)의 넓이, 즉 $\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2 = \frac{\pi a^2}{8}$이

다.



점화식

$n \geq 1$이라 하자. $u = x^{n+\frac{1}{2}}$, $\mathrm{d}v = (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분한다. 그러면 $\mathrm{d}u = (n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$이고 $v = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$이다. 이로부터

$$\mathrm{I}_n = \Big[-\tfrac{2}{3}x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\Big]_0^a + \frac{2}{3}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x.$$

를 얻는다. 경계항은 양 끝에서 모두 0이 된다. $x = a$에서는 인수 $(a-x)^{3/2}$ 때문이고, $x = 0$에서는 $x^{n+\frac{1}{2}}$ 때문이다. 또한 $\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2}) = \frac{2n+1}{3}$임에 주목하자.

> **생각해 보기** 새로 생긴 적분에는 $(a-x)^{3/2}$이 들어 있어서 I_{n-1} 꼴이 아니다. 이것을 어떻게 처리할까?

$(a-x)^{3/2} = (a-x)\,(a-x)^{1/2}$로 쓰고 첫 번째 인수를 전개한다.

$$\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x = a\int_0^a x^{n-\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x - \int_0^a x^{n+\frac{1}{2}}(a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n.$$

따라서 3을 곱하고 I_n 항을 모으면$(3+2n+1 = 2n+4)$

$$\mathrm{I}_n = \frac{2n+1}{3}(a\,\mathrm{I}_{n-1} - \mathrm{I}_n) \quad\Longrightarrow\quad (2n+4)\,\mathrm{I}_n = (2n+1)\,a\,\mathrm{I}_{n-1},$$

이다. 이것이 구하려는 결과이다.

I_n 계산하기

$k = n, n-1, \ldots, 1$에 대해 $\mathrm{I}_k = \dfrac{(2k+1)a}{2k+4}\,\mathrm{I}_{k-1}$을 차례로 적용하여 I_0까지 내려가면

$$\mathrm{I}_n = a^n \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+4)} \cdot \frac{\pi a^2}{8}.$$

을 얻는다. 이제 두 곱을 정리한다. 분자는 홀수들의 곱 $3\cdot 5\cdots(2n+1)$이다. 여기에 빠진 짝수들 $2\cdot 4\cdots(2n) = 2^n n!$을 채워 넣으면

$$\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n\,n!}.$$

이다. 분모는 $\prod_{k=1}^{n} 2(k+2) = 2^n \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+2) = 2^n \dfrac{(n+2)!}{2}$이다. 그러므로

$$\mathrm{I}_n = \frac{\pi a^{n+2}}{8} \cdot \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!} \cdot \frac{2}{2^n\,(n+2)!} = \boxed{\frac{\pi\, a^{n+2}\,(2n+1)!}{4^{n+1}\, n!\,(n+2)!}}$$

이 식은 $n = 0$일 때에도 올바른 값 $\frac{\pi a^2}{8}$을 준다.

검산

- $n = 1$: 점화식(recurrence)에서 $6\mathrm{I}_1 = 3a\mathrm{I}_0$이므로 $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$이다. 공식에서는 $\pi a^3 \cdot 3!/(16 \cdot 1! \cdot 3!) = \frac{\pi a^3}{16}$이 나오므로 일치한다.
- 대칭성(symmetry): x를 $a - x$로 바꾸면 $\mathrm{I}_1 = \int_0^a x^{1/2}(a-x)^{3/2}\,\mathrm{d}x$이기도 함을 알 수 있다. 두 표현을 더하면 $2\mathrm{I}_1 = a\mathrm{I}_0$이 되어, $\mathrm{I}_1 = \frac{\pi a^3}{16}$을 독립적으로 확인할 수 있다.
- $a = 1$로 두고 심프슨 공식(Simpson's rule)이나 중점 공식(midpoint rule)으로 수치 적분하면 $\mathrm{I}_0 \approx 0.392699 = \pi/8$이고 $\mathrm{I}_3 \approx 0.085903$이다. 공식에서는 $\pi \cdot 7!/(4^4 \cdot 3! \cdot 5!) = 35\pi/1280 \approx 0.085903$이 나온다.

흔한 실수

- v의 부호를 틀리는 것: 연쇄 법칙(chain rule)에서 나오는 마이너스 부호 때문에 $\int (a-x)^{1/2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(a-x)^{3/2}$이다.
- 우변에 I_n이 다시 나타나 이를 모아야 한다는 것을 알아차리지 못하고, I_{n-1}에 직접 도달하려고 애쓰는 것.
- $3 \cdot 4 \cdots (n+2) = (n+2)!/2$에서 인수 2를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

이 적분들은 베타 함수(Beta function) $B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t$의 특수한 경우이다. $x = at$로 치환하면 $\mathrm{I}_n = a^{n+2}B\left(n+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$임을 알 수 있다. 우리가 증명한 점화식은 항등식 $B(p+1,q) = \frac{p}{p+q}B(p,q)$의 한 경우이다. 대학 1학년 과정에서는 공식 $B(p,q) = \Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$를 배우는데, 이 공식은 π가 어디에서 오는지 설명해 준다. 바로 감마 함수(Gamma function)의 값 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)에는 이런 형식의 점화식 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.