풀이

STEP III 1995, 문제 14

확률과 통계 • 적률생성함수

STEP III 1995, 14번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s3-q14

핵심 아이디어

적률생성함수(moment generating function, MGF)는 독립(independent)인 확률변수(random variable)들의 합을 곱으로 바꾸어 준다. 즉 T_1과 T_2가 독립이면 $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta(T_1+T_2)}] = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}]\,\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_2}]$이다. 따라서 MGF 하나를 구하고, 그것을 거듭제곱한 다음, 그 결과가 같은 꼴의 확률밀도함수(density)의 MGF임을 알아보면 된다. MGF는 분포를 결정하므로 이렇게 알아보는 것만으로 충분하다.

풀이

T의 MGF

실수 θ에 대하여

$$M_T(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T}] = \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-(1-\theta)t}\,\mathrm{d}t.$$

이 적분은 $\theta < 1$일 때만 수렴(converge)하므로(그렇지 않으면 피적분함수가 0으로 가지 않는다), 이제부터 $\theta < 1$이라고 가정한다. 앞으로 거듭 쓰게 될 적분은

$$\int_0^\infty t^k \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{k!}{\lambda^{k+1}} \qquad (\lambda > 0,\ k = 0, 1, 2, \dots),$$

이며, 이는 부분적분(integration by parts)을 k번 하면 얻어진다(또는 $s = \lambda t$로 치환하고 $\int_0^\infty s^k \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = k!$을 이용해도 된다). $k = 1$, $\lambda = 1 - \theta > 0$으로 두면

$$\boxed{M_T(\theta) = \frac{1}{(1-\theta)^2}}, \qquad \theta < 1.$$

간단히 확인해 보면, 모든 MGF가 만족해야 하듯이 $M_T(0) = 1$이다.

U의 MGF

T_1과 T_2를 두 문제에 걸리는 시간이라 하면 $U = T_1 + T_2$이고, T_1과 T_2는 각각 확률밀도함수 f를 가지며 (문제에서 주어진 대로) 서로 독립이다. 그러면 $\mathrm{e}^{\theta T_1}$과 $\mathrm{e}^{\theta T_2}$도 독립이므로, 이들의 곱의 기댓값(expectation)은 각 기댓값의 곱이다.

$$M_U(\theta) = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{\theta T_1}\mathrm{e}^{\theta T_2}] = M_T(\theta)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^4}, \qquad \theta < 1.$$

U의 확률밀도함수

이제 제시된 확률밀도함수 $\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}$의 MGF를 계산한다. 위의 적분에서 $k = 3$, $\lambda = 1 - \theta$로 두면

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\theta u}\,\tfrac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(1-\theta)^4} = \frac{1}{(1-\theta)^4}.$$

($\theta = 0$으로 두면 g의 적분값이 1임이 확인되므로, 이것은 진짜 확률밀도함수이다.)

> **생각해 보기** g가 U와 같은 MGF를 가짐을 보였다. 왜 이것으로 U의 확률밀도함수가 g라고 말할 수 있는가?

여기에는 MGF의 유일성 정리(uniqueness theorem)가 쓰인다. 두 확률변수의 MGF가 $\theta = 0$을 포함하는 어떤 열린구간에서 존재하고 서로 같으면, 두 확률변수는 같은 분포를 가진다. 이 경우 두 MGF는 모든 $\theta < 1$에서 같고, 이 범위는 구간 $(-1, 1)$을 포함한다. 따라서 U의 확률밀도함수는

$$\mathrm{g}(u) = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}, \qquad u \geq 0,$$

이고, 이것이 보이려던 것이다.

유일성 정리를 쓰고 싶지 않다면, 합성곱(convolution) 공식으로 같은 결과를 직접 얻을 수 있다. $T_1, T_2 \geq 0$이므로 $u \geq 0$에 대하여

$$\begin{aligned}\mathrm{g}(u) &= \int_0^u \mathrm{f}(s)\,\mathrm{f}(u-s)\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{-u}\int_0^u s(u-s)\,\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{e}^{-u}\left[\tfrac{1}{2}us^2 - \tfrac{1}{3}s^3\right]_0^u = \frac{1}{6}u^3\mathrm{e}^{-u}.\end{aligned}$$

n문제에 걸리는 총 시간

$U_n = T_1 + \cdots + T_n$이라 하자. 여기서 T_i들은 독립이고 확률밀도함수 f를 가진다. 같은 곱의 논리로

$$M_{U_n}(\theta) = M_T(\theta)^n = \frac{1}{(1-\theta)^{2n}}, \qquad \theta < 1.$$

$n = 2$일 때의 꼴을 보면 확률밀도함수가 $\mathrm{h}_n(u) = c\,u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}$일 것이라고 짐작할 수 있다. $k = 2n-1$인 경우의 적분을 쓰면 이것의 MGF는 $c\,(2n-1)!/(1-\theta)^{2n}$이다. 이것은 정확

히 $c = 1/(2n-1)!$일 때 M_{U_n}과 같다. 다시 유일성 정리에 의하여, n문제에 걸리는 총 시간의 확률밀도함수는

$$\boxed{\mathrm{h}_n(u) = \frac{u^{2n-1}\mathrm{e}^{-u}}{(2n-1)!}, \qquad u \geq 0.}$$

$n = 1$이면 f가, $n = 2$이면 g가 나오므로 마땅히 그래야 할 결과와 일치한다.

검산

- $\mathrm{E}[T] = M_T'(0) = 2$이고, 이는 $\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2$와 일치한다. 따라서 $\mathrm{E}[U_n] = 2n$이다. h_n으로부터도 같은 값이 나온다. $\int_0^\infty u^{2n}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u/(2n-1)! = (2n)!/(2n-1)! = 2n$.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{0.5t}\,t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 4.000$이며, 이는 $1/(1-0.5)^2$와 일치한다. f에서 뽑은 세 시간의 합을 2×10^5번 시뮬레이션한 결과 $\mathrm{P}(U_3 \leq 5) \approx 0.386$이었고, h_3으로 구한 값은 $\int_0^5 u^5\mathrm{e}^{-u}/120\,\mathrm{d}u \approx 0.384$이다.

흔한 실수

- 조건 $\theta < 1$을 빠뜨리는 것. $\theta \geq 1$이면 MGF가 존재하지 않는다.
- MGF를 곱하지 않고 더하는 것. U의 MGF는 $M_T(\theta)^2$이지 $2M_T(\theta)$가 아니다. ($2T$의 MGF는 $M_T(2\theta)$이며, 이것은 또 다른 것이다.)
- 정규화 상수(normalising constant)의 계승(factorial)을 잘못 쓰는 것. u의 지수가 $2n-1$이므로 상수는 $1/(2n-1)!$이지 $1/(2n)!$이 아니다.

STEP 너머

확률밀도함수 $t\mathrm{e}^{-t}$는 형상모수(shape)가 2이고 비율모수(rate)가 1인 감마분포(gamma distribution)이며, h_n은 형상모수가 $2n$인 감마분포이다. 이 문제는 비율모수가 같은 독립인 감마분포들을 더하면 형상모수가 더해진다는 것을 보여 준다. 특히 각 T는 독립인 두 지수분포(exponential distribution) 시간의 합처럼 행동하는데, 바로 이런 방식으로 감마분포가 푸아송 과정(Poisson process)에서 k번째 사건까지의 대기 시간으로 나타난다. 대학에서는 항상 존재하는 특성함수(characteristic function) $\mathrm{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta X}]$를 배우고, 이를 이용해 중심극한정리(central limit theorem)를 증명하게 된다. Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문)은 생성함수와 이러한 아이디어를 명료하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.