풀이

STEP III 1995, 문제 11

역학 • 상대 속도

> **STEP III 1995, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q11

핵심 아이디어

배의 기준틀(frame)에서 생각한다. 배에 대하여 비행기는 북서쪽 직선을 따라 곧게 나갔다가 곧게 돌아와야 한다. 비행기는 공기에 실려 움직이므로, 이 기준틀에서 비행기의 속도는 대기 속도(airspeed) 벡터에 "흐름"을 더한 것이다. 이 흐름은 바람의 속도에서 배의 속도를 뺀 것이다. 이 흐름을 알고 나면 각 구간은 강을 건너는 문제가 된다. 합속도(resultant)가 직선 방향을 향하도록 기수 방향을 정하고, 왕복 시간으로부터 거리를 구한다.

풀이

전체에 걸쳐 x축을 동쪽, y축을 북쪽으로 잡고, 속력은 노트(knots, 시간당 해리)로 잰다. 그러면 거리는 해리(nautical miles) 단위로 나온다. 배의 속도는 $(-V, 0)$이다. 공기가 속도 $\mathbf{w}$로 움직이고, 공기에 대한 비행기의 속도가 $|\mathbf{a}| = kV$인 $\mathbf{a}$라면, 배에 대한 비행기의 속도는

$$\mathbf{a} + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \mathbf{w} - (-V, 0) = \mathbf{w} + (V, 0).$$

이다. 비행기는 배의 북서쪽에 머물러야 하므로, $\mathbf{a} + \mathbf{c}$는 나갈 때는 $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ 방향을, 돌아올 때는 $-\mathbf{u}$ 방향을 향해야 한다.

바람이 불 때: 나가는 비행

바람은 북쪽에서 남쪽으로 불므로 $\mathbf{w} = (0, -V)$이고

$$\mathbf{c} = (V, -V) = -\sqrt{2}\, V\, \mathbf{u}.$$

이다. 이 흐름의 속력은 $\sqrt{2}\, V$이고, 정확히 남동쪽, 즉 초계 직선 방향을 향한다. 따라서 조종사는 비행기를 그냥 직선 방향으로 향하게 하면 된다. 나갈 때(북서쪽)는 흐름을 정면으

로 거슬러 날고, 돌아올 때는 흐름을 타고 난다.

$$\text{나가는 속력} = (k-\sqrt{2})V, \qquad \text{돌아오는 속력} = (k+\sqrt{2})V.$$

여기서 $k > \sqrt{2}$이어야 한다. 그렇지 않으면 비행기는 북서쪽 직선을 따라 배에서 결코 멀어질 수 없다.

비행기가 배로부터 거리 d_w까지 나가고 한 번의 왕복에 $\frac{1}{2}$시간이 걸린다면

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} + \frac{d_w}{(k+\sqrt{2})V} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d_w}{V} \cdot \frac{2k}{k^2-2} = \frac{1}{2},$$

이므로

$$d_w = \frac{(k^2-2)V}{4k}.$$

이다. 따라서 나가는 비행에 걸리는 시간은

$$\frac{d_w}{(k-\sqrt{2})V} = \frac{k^2-2}{4k(k-\sqrt{2})} = \frac{k+\sqrt{2}}{4k} \text{ 시간} = 15\left(1+\frac{\sqrt{2}}{k}\right) \text{ 분}.$$

이다. 이 값은 항상 15분보다 크며, 이는 당연하다. 나가는 구간은 흐름을 거슬러 가기 때문이다.

> **생각해 보기** 바람이 없을 때에도 비행기를 그냥 북서쪽으로 향하게 하면 안 되는 이유는 무엇인가?

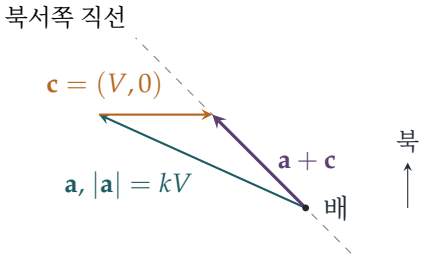
바람이 없을 때는 흐름이 더 이상 초계 직선 방향이 아니다. 조종사가 비행기를 북서쪽으로 향하게 하면, 흐름의 동쪽 방향 부분이 비행기를 직선에서 벗어나게 한다. 조종사는 흐름 쪽으로 약간 비스듬히 기수를 돌려야 하며, 그만큼 대기 속도의 일부가 소모된다.

바람이 없을 때

이제 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{c} = (V, 0)$이다. 즉 배에 대하여 공기는 동쪽으로 속력 V로 흐른다. $\mathbf{c}$를 $\mathbf{u}$를 써서 직선 방향 성분(component)으로, $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$을 써서 직선에 수직인 성분으로 분해하면

$$\mathbf{c} = -\frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{u} + \frac{V}{\sqrt{2}}\,\mathbf{v}.$$

이다.



합속도는 **v** 성분이 없어야 하므로, **a**의 **v** 성분은 $-V/\sqrt{2}$이어야 한다. $|\mathbf{a}| = kV$이므로 진행 방향의 성분은

$$\sqrt{k^2V^2 - \tfrac{1}{2}V^2} = V\sqrt{k^2 - \tfrac{1}{2}}.$$

이다. 직선 방향으로 흐름은 나갈 때 $-V/\sqrt{2}$, 돌아올 때 $+V/\sqrt{2}$만큼 기여한다($\mathbf{c}\cdot(-\mathbf{u}) = V/\sqrt{2}$이기 때문이다). $A = V\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}$, $B = V/\sqrt{2}$로 놓으면

$$\text{나가는 속력} = A - B, \qquad \text{돌아오는 속력} = A + B.$$

이다. $A^2 - B^2 = V^2(k^2 - 1) > 0$이므로 나가는 속력은 양수이다.

왕복 시간이 똑같이 30분이므로

$$\frac{d_c}{A-B} + \frac{d_c}{A+B} = \frac{2A\,d_c}{A^2 - B^2} = \frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad d_c = \frac{A^2 - B^2}{4A} = \frac{V(k^2-1)}{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}.$$

이다.

비

나누면

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{(k^2-2)V}{4k} \cdot \frac{4\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{V(k^2-1)} = \frac{(k^2-2)\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}}}{k(k^2-1)}.$$

이다. $\sqrt{k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{4k^2 - 2}$이므로

$$\frac{d_w}{d_c} = \frac{k^2-2}{2k(k^2-1)}\sqrt{4k^2-2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $k \to \infty$이면 바람과 배는 거의 영향을 주지 않는다. 나가는 비행 시간은 15분에 가까워지고, $d_w/d_c \to 1$이다(비의 분자와 분모가 모두 $2k^3$처럼 커진다).

- $k \to \sqrt{2}^{+}$이면 바람이 불 때 나가는 속력이 0으로 떨어지므로, 공식이 말하는 대로 $d_w \to 0$이고 비는 $\to 0$이다.
- $k = 2$이면 나가는 비행 시간은 $15(1 + 1/\sqrt{2}) \approx 25.6$분이고, $d_w/d_c = \frac{2}{12}\sqrt{14} \approx 0.624$이다. 기수 방향을 직접 풀어서 구하는 방법과 운동을 단계별로 계산하는 방법으로 이 값을 수치적으로 확인하였다.

흔한 실수

- 바람의 방향을 거꾸로 잡는 것. "북쪽에서 남쪽으로" 부는 바람은 남쪽**을 향해** 분다.
- 배의 속도를 빼지 않고 더하는 것. 서쪽으로 가는 배에 대하여 정지한 공기는 **동쪽**으로 흐른다.
- 바람이 없을 때 비행기를 북서쪽으로 향하게 하고 속력을 $kV \pm V/\sqrt{2}$로 쓰는 것. 수직 방향 흐름을 먼저 상쇄해야 한다.

STEP 너머

이것은 갈릴레이(Galilean) 기준틀 변환이다. 서로에 대해 등속으로 움직이는 기준틀에서 잰 속도는 일정한 벡터만큼 차이가 난다. 같은 계산 방식이 마이컬슨–몰리(Michelson–Morley)의 "강 위의 배" 논증의 바탕에 있다. 거기서는 가로질러 갔다 오는 왕복과 나란히 갔다 오는 왕복이 바로 이 문제에서와 같은 방식으로 서로 다른 시간이 걸리며, 이것이 특수 상대성 이론이 뒤집은 고전적인 계산이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 관점에서 상대 운동을 다룬 다음 상대성 이론으로 나아간다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.