풀이

STEP III 1995, 문제 10

역학 • 경사면 위의 포물체 운동

STEP III 1995, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s3-q10

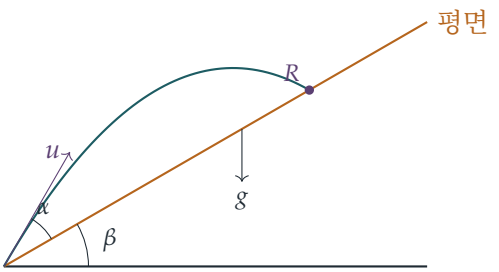
핵심 아이디어

경사면(inclined plane) 위에서 자연스러운 좌표축은 수평과 수직이 아니라 평면에 **나란한** 방향과 평면에 **수직인** 방향이다. 이 축에서 중력은 두 개의 일정한 성분을 가지고, 비행 시간(time of flight)은 수직 방향 운동만으로 정해지며, 사거리(range)는 삼각함수의 곱이 된다. 곱을 합으로 바꾸는 공식(factor formula)으로 이 곱을 사인의 차로 바꾸면 미분을 쓰지 않아도 최댓값이 바로 보인다.

풀이

설정하기

포탄을 공기 저항 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 질점(particle)으로 모형화하고, 평면의 아래 끝에서 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 위쪽으로 발사한다고 하자. 포탄을 **평면 위로** 각 α만큼 기울여 발사한다고 하면, 수평면에 대한 앙각(angle of elevation)은 $\theta = \alpha + \beta$이다. 포탄이 평면 위쪽으로 올라가려면 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$이어야 한다.



x축을 최대 경사선을 따라 위쪽으로, y축을 평면에 수직이며 평면에서 멀어지는 방향으로 잡자. (연직 아래 방향의) 가속도 g를 이 두 방향으로 분해하면

$$\ddot{x} = -g\sin\beta, \qquad \ddot{y} = -g\cos\beta,$$

이고, 초기 속도의 성분은 평면 방향으로 $u\cos\alpha$, 평면에 수직인 방향으로 $u\sin\alpha$이다. 따라서 시각 t에서

$$x = ut\cos\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\beta, \qquad y = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\beta.$$

비행 시간과 사거리

포탄은 $t > 0$에서 다시 $y = 0$이 될 때 떨어진다.

$$T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

그러면 평면을 따라 올라간 거리는

$$\begin{aligned} R = x(T) &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\beta} - \tfrac{1}{2}g\sin\beta\cdot\frac{4u^2\sin^2\alpha}{g^2\cos^2\beta} \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha}{g\cos^2\beta}\left(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \\ &= \frac{2u^2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}. \end{aligned}$$

생각해 보기 미분하지 않고 $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)$를 최대로 만들려면 어떻게 해야 할까?

곱을 합으로 바꾸는 공식 $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$에 $A = \alpha$, $B = \alpha+\beta$를 대입하면

$$2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta,$$

이므로

$$R = \frac{u^2\left(\sin(2\alpha+\beta) - \sin\beta\right)}{g\cos^2\beta}.$$

α에 의존하는 항은 $\sin(2\alpha+\beta)$뿐이고, 이 값은 1 이하이다. α가 $(0, \frac{\pi}{2}-\beta)$를 움직일 때 각 $2\alpha+\beta$는 $(\beta, \pi-\beta)$를 움직이며, 이 구간은 $\frac{\pi}{2}$를 포함한다. 따라서 최댓값 1에 실제로 도달하고, 그것은 정확히 $2\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$일 때, 즉

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}, \qquad \text{즉} \qquad \theta = \alpha+\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

일 때이다. 그러므로 대포는 수평면 위로 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$의 각으로 쏘아야 한다. 즉 발사 방향은 평면과 연직선 사이의 각을 이등분한다.

최대 사거리

$\sin(2\alpha+\beta)=1$이고, $\cos^2\beta = 1-\sin^2\beta = (1-\sin\beta)(1+\sin\beta)$를 이용하면

$$R_{\max} = \frac{u^2(1-\sin\beta)}{g(1-\sin\beta)(1+\sin\beta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\beta)},$$

이다. 여기서 $\beta < \frac{\pi}{2}$이므로 $1-\sin\beta$로 약분하는 것은 정당하다. 이것이 구하는 거리이다.

검산

- 평평한 지면, 즉 $\beta = 0$인 경우: 최적의 각은 45°이고 사거리는 u^2/g로, 익숙한 결과와 같다.
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$일 때(연직인 "평면"), 최적의 방향은 연직 위쪽에 가까워지고 $R_{\max} \to u^2/(2g)$이다. 이는 연직 위로 쏜 포탄이 도달하는 최고 높이이다.
- 수치로 확인하면, $u = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\beta = 30^\circ$일 때 공식은 앙각 60°에서 $R_{\max} \approx 27.18\,\mathrm{m}$를 준다. 포탄이 평면을 지날 때까지 수평·연직 좌표에서 운동을 단계적으로 계산하면 임의의 u, β, α에 대해 $R(\alpha)$가 그대로 재현되고, α에 대해 촘촘히 탐색하면 최댓값이 $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$에서 나타난다.

흔한 실수

- 수평면에 대한 각과 평면에 대한 각을 혼동하는 것. 답 $\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$는 수평면으로부터 잰 각이다.
- 평면 방향 성분 $-g\sin\beta$를 빠뜨리는 것. 그러면 평평한 지면의 사거리 공식이 잘못된 비율로 나온다.

STEP 너머

우아한 기하학적 관점이 있다. 한 점에서 속력 u로 쏜 모든 궤적은 발사점을 초점(focus)으로 하는 "안전 포물선(parabola of safety)"(궤적들의 포락선(envelope)) 안쪽에 놓이며, 임의의 평면 위에서의 최대 사거리는 그 평면이 이 포물선과 만나는 곳이다. 그러면 초점–준선(directrix) 성질로부터 한 줄 만에 $R_{\max} = u^2/(g(1+\sin\beta))$를 얻고, 최적의 방향이 평면과 연직선 사이의 각을 이등분하는 이유도 설명된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 벡터 방법으로 다루는 포물체 문제로 나아가기에 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.