풀이

STEP III 1995, 문제 1

순수수학 • 연립일차방정식

> **STEP III 1995, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s3-q1

핵심 아이디어

두 번째와 세 번째 방정식은 y항과 z항이 같으므로, 한 식에서 다른 식을 빼면 미지수 두 개가 한꺼번에 사라지고 x에 대한 방정식 하나만 남는다. 이 문제의 대부분은 그 단계나 이후의 나눗셈이 성립하지 않게 되는 a, b의 값에 관한 것이다. 계수들의 행렬식(determinant)을 보면 그런 값이 어디에 있는지 미리 알 수 있으므로, 먼저 행렬식을 계산한 다음 각각의 예외적인 경우를 따로 다룬다.

풀이

방정식에 다음과 같이 번호를 붙인다.

$$a^2x + ay + z = a^2 \tag{1}$$

$$ax + y + bz = 1 \tag{2}$$

$$a^2bx + y + bz = b. \tag{3}$$

어디에서 문제가 생길 수 있는가?

계수행렬(coefficient matrix)의 행렬식을 첫 번째 행을 따라 전개하면

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ a & 1 & b \\ a^2b & 1 & b \end{vmatrix} = a^2(b-b) - a(ab - a^2b^2) + (a - a^2b)$$

$$= a^3b^2 - 2a^2b + a = a(ab-1)^2.$$

따라서 $a = 0$이거나 $ab = 1$인 경우가 아니면 해는 정확히 하나이다. 그런 경우에는 해가 없거나 무수히 많으며, 어느 쪽인지 정하려면 방정식 자체를 살펴보아야 한다.

일반적인 경우: $a \neq 0$이고 $ab \neq 1$

(3)에서 (2)를 빼면 y와 z가 사라진다.

$$(a^2b - a)x = b - 1, \qquad \text{즉,} \qquad a(ab-1)\,x = b - 1.$$

$a \neq 0$이고 $ab \neq 1$이므로 양변을 나눌 수 있고, 그러면

$$x = \frac{1-b}{a(1-ab)}.$$

다음으로, (1)에서 $z = a^2 - a^2x - ay$를 얻는다. 이것을 (2)에 대입하면

$$ax + y + a^2b - a^2bx - aby = 1 \quad \Longrightarrow \quad (1-ab)\,y = (1-a^2b) - ax(1-ab).$$

$1 - ab \neq 0$으로 나누고 $ax = \dfrac{1-b}{1-ab}$를 이용하면

$$y = \frac{1-a^2b}{1-ab} - \frac{1-b}{1-ab} = \frac{b-a^2b}{1-ab} = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}.$$

마지막으로,

$$\begin{aligned} z = a^2 - a(ax) - ay &= a^2 - \frac{a(1-b)}{1-ab} - \frac{ab(1-a^2)}{1-ab} \\ &= \frac{a^2 - a^3b - a + ab - ab + a^3b}{1-ab} = \frac{a(a-1)}{1-ab}. \end{aligned}$$

그러므로 $a \neq 0$이고 $ab \neq 1$일 때 유일한 해는 다음과 같다.

$$\boxed{x = \frac{1-b}{a(1-ab)}, \qquad y = \frac{b(1-a^2)}{1-ab}, \qquad z = \frac{a(a-1)}{1-ab}.}$$

$a = 0$인 경우

방정식은 다음과 같이 된다.

$$z = 0, \qquad y + bz = 1, \qquad y + bz = b,$$

따라서 $z = 0, y = 1$이고, 마지막 방정식은 $1 = b$임을 말해 준다. 그러므로

- $a = 0$이고 $b \neq 1$이면 **해가 없다**;
- $a = 0$이고 $b = 1$이면, 임의의 실수 λ에 대하여 $x = \lambda, y = 1, z = 0$이 해이다. x가 더 이상 어떤 방정식에도 나타나지 않으므로, 해는 하나의 직선을 이룬다.

$ab = 1$인 경우 (따라서 $a \neq 0$)

생각해 보기 $ab = 1$이면 방정식 $a(ab-1)x = b-1$의 좌변은 0이다. 이것은 무엇을 말해 주는가?

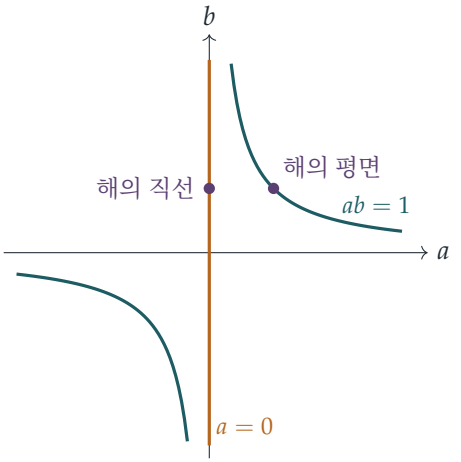
(3)에서 (2)를 빼는 것은 여전히 유효하며, 이제 그 결과는 $0 = b-1$이 된다. 따라서 $b \neq 1$이면 방정식들은 모순(inconsistent)이다. $ab = 1$일 때 조건 $b = 1$이면 반드시 $a = 1$이다. 그러므로

- $ab = 1$이고 $a \neq 1$이면 **해가 없다**;
- $a = b = 1$이면 세 방정식이 모두 $x + y + z = 1$이 되므로, 임의의 실수 λ, μ에 대하여 $x = \lambda, y = \mu, z = 1 - \lambda - \mu$가 해이다. 해는 평면 하나 전체를 이룬다.

이것은 행렬식에 제곱 인수 $(ab-1)^2$이 있다는 사실과 잘 맞아떨어진다. $a = b = 1$에서는 행렬의 계수(rank)가 1까지 떨어지므로 자유 매개변수가 두 개이고, $a = 0, b = 1$에서는 계수가 2이므로 자유 매개변수가 하나뿐이다.

요약

아래 그림은 (a, b)-평면을 나타낸다. 직선 $a = 0$과 쌍곡선(hyperbola) $ab = 1$ 밖에서는 해가 유일하다. 이 직선과 쌍곡선 위에서는 표시된 두 점을 제외하면 해가 없다.



- $a \neq 0, ab \neq 1$: 위의 상자 안에 있는 유일한 해.
- $a = 0, b = 1$: $(x, y, z) = (\lambda, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.
- $a = b = 1$: $(x, y, z) = (\lambda, \mu, 1 - \lambda - \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- $a = 0$이고 $b \neq 1$, 또는 $ab = 1$이고 $a \neq 1$: 해가 없다.

검산

$a = 2, b = 3$으로 놓자. 공식에 따르면 $x = \frac{1}{5}, y = \frac{9}{5}, z = -\frac{2}{5}$이고, 실제로 $4 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{9}{5} - \frac{2}{5} = 4 = a^2$, $\frac{2}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 1$, $\frac{12}{5} + \frac{9}{5} - \frac{6}{5} = 3 = b$이다. 또 하나의 간단한 확인은 $b = 1, a \neq 0, 1$인 경우이다. 이때 공식은 $x = 0, y = 1 + a, z = -a$를 주며, 이 값들은 세 방정식을 모두 만족한다. 또한 무작위로 고른 2000개의 순서쌍 (a, b)에 대하여 정확한 유리수 계산으로 행렬식과 일반 공식을 확인하였다.

흔한 실수

- $a = 0$과 $ab = 1$인 경우를 먼저 따로 떼어 놓지 않고 $a(ab - 1)$로 나누는 것. "가능한 모든 값에 대하여"라는 말은 특수한 경우들이 바로 이 문제의 핵심이라는 뜻이다.
- "행렬식이 0이므로 해가 없다"고 말하는 것. 행렬식이 0이라는 것은 **유일한** 해가 있을 가능성만 배제한다. 이 문제에서는 특수한 매개변수 값 가운데 두 경우에 해가 무수히 많다.
- $ab = 1$과 $b = 1$이 함께 성립하면 반드시 $a = 1$이 되어, 쌍곡선 위의 특수한 점은 단 하나뿐이라는 사실을 놓치는 것.

STEP 너머

이것은 행렬의 계수가 연립일차방정식을 어떻게 좌우하는지 보여 주는 작은 예이다. 연립방정식은 계수행렬과 첨가행렬(augmented matrix)의 계수가 같을 때, 그리고 그때에만 해를 가지며, 이때 해들은 차원이 3 − 계수인 집합을 이룬다. 그래서 우리는 한 점, 한 직선, 또는 한 평면을 얻은 것이다. 가우스(Gauss) 소거법(Gaussian elimination)을 쓰면 이 모든 것을 체계적으로 다룰 수 있으며, 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 많은 풀이 예제와 함께 이를 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.