풀이

STEP II 1995, 문제 9

역학 • 마찰과 평형

STEP II 1995, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

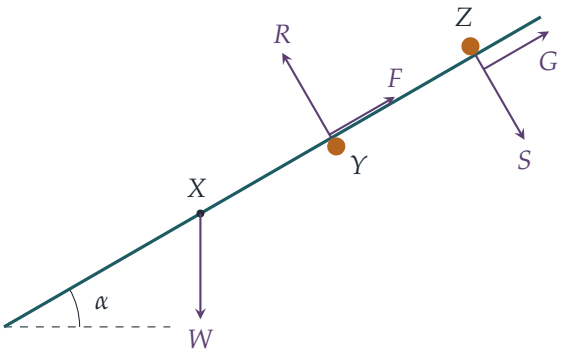
step.maths.org/questions/95-s2-q9

핵심 아이디어

막대는 최대 경사선(line of greatest slope)을 따라 놓여 있으므로, 막대 방향과 그에 수직인 방향으로 힘을 분해(resolve)하는 것이 자연스럽다. 막대가 그 위에 얹혀 있는 가로대는 막대를 평면에서 멀어지는 쪽으로 밀어 올리고, 막대가 그 아래로 지나가는 가로대는 막대를 아래로 누를 수만 있다. Y에 대한 모멘트(moment)를 취하면 중심이 어디에 있어야 하는지 알 수 있고, 그다음 두 마찰력(frictional force)이 모두 경사면 위쪽으로, 각각의 한계값(limiting value)으로 작용하게 하면 가장 작은 μ를 얻는다.

풀이

막대를 무게가 W인 균일한 강체(rigid body) 막대로, 가로대들을 고정된 가는 막대로 모형화한다. 각 가로대는 막대에 수직인 수직항력(normal reaction)과 막대 방향의 마찰력을 준다. 막대는 수평인 두 가로대에 모두 수직이므로 두 가로대가 이루는 평면의 최대 경사선을 따라 놓이고, 따라서 수평면과 α의 각을 이룬다. R를 Y에서의 수직항력(막대가 이 가로대 위에 놓여 있으므로 막대를 평면에서 멀어지는 쪽으로 민다), S를 Z에서의 수직항력(막대가 이 가로대 아래에 있으므로 막대를 평면 쪽으로 민다)이라 하고, $R, S \geq 0$이라 하자. F와 G를 각각 Y와 Z에서의 마찰력이라 하고, 경사면 위쪽 방향을 양으로 잡는다.



중심이 있어야 할 위치

막대에 수직인 방향으로 힘을 분해하고 Y에 대한 모멘트를 취하면(거리는 막대를 따라 잰다) 다음을 얻는다.

$$R = S + W\cos\alpha,$$
$$S\,d = W\cos\alpha \cdot XY.$$

Y에 대한 S의 모멘트는 무게의 성분 $W\cos\alpha$의 모멘트와 평형을 이루어야 하는데, 이 성분은 S와 마찬가지로 평면 쪽으로 작용한다. 같은 방향의 두 평행한 힘이 Y에 대해 서로 상쇄되는 모멘트를 가지려면, 두 힘은 Y의 서로 반대쪽에 작용해야 한다. Z는 Y보다 경사면 위쪽에 있으므로, 중심 X는 Y와 같은 위치이거나 그 아래쪽에 있어야 하고, 이때

$$XZ = XY + YZ, \qquad \text{따라서} \qquad l = XY + d \geq d.$$

이다. (만약 X가 Y와 Z 사이에 있거나 Z보다 더 위쪽에 있다면, 모멘트 방정식에 의해 $S < 0$이어야 한다. 즉 Z의 가로대가 막대를 끌어당겨야 하는데, 가로대는 그렇게 할 수 없으므로 막대는 회전하여 가로대에서 벗어난다.) 등호 $l = d$는 X가 Y에 있고 $S = 0$인 경계의 경우이다.

> ? **생각해 보기** 문제지에는 $l \leq d$라고 되어 있다. 왜 우리는 반대 방향의 부등식을 얻는가?

문제지의 부등식은 오식이다. 문제 자체가 뒤이어 $l = 2d$로 두는데, 이는 $l \geq d$일 때에만 가능하다. 위의 논증은 평형(equilibrium)을 위해 필요한 조건이 $l \geq d$임을 보여 주며, 우리는 이것을 사용한다.

μ의 최솟값

$XY = l - d$이므로 두 방정식에서

$$S = \frac{W\cos\alpha\,(l-d)}{d}, \qquad R = \frac{W\cos\alpha\,l}{d}, \qquad \text{따라서} \qquad R + S = \frac{W\cos\alpha\,(2l-d)}{d}.$$

를 얻는다. 막대 방향으로 힘을 분해하면, 마찰력이 경사면 아래쪽으로 향하는 무게의 성분을 지탱해야 한다.

$$F + G = W \sin\alpha.$$

마찰 법칙에 따라 $|F| \le \mu R$이고 $|G| \le \mu S$이므로 $F + G \le \mu(R + S)$이다. 따라서 평형이 되려면

$$W \sin\alpha \le \mu \frac{W \cos\alpha\,(2l - d)}{d}, \qquad \text{즉,} \qquad \mu \ge \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

이어야 한다. 역으로 μ가 이 값과 같으면 $F = \mu R$와 $G = \mu S$(둘 다 경사면 위쪽 방향이고, 둘 다 한계값)가 모든 방정식을 만족하므로 막대는 평형 상태에 있을 수 있다. 따라서 가능한 최솟값은

$$\mu_{\min} = \frac{d \tan\alpha}{2l - d}.$$

이다.

$l = 2d$일 때 이 값은 $\mu_{\min} = \dfrac{d \tan\alpha}{3d} = \frac{1}{3}\tan\alpha$가 되므로, 요구한 대로 $\mu \ge \frac{1}{3}\tan\alpha$이다.

검산

- $l = d$일 때 중심은 아래쪽 가로대 위에 있고 $S = 0$이며, $\mu \ge \tan\alpha$를 얻는다. 이는 거친 경사면 위에 정지해 있는 한 입자에 대한 익숙한 조건이다.
- $l \to \infty$이면 수직항력이 한없이 커지므로 아주 작은 마찰만 있으면 되고, 실제로 $\mu_{\min} \to 0$이다.
- 수치적으로 $\alpha = 0.7$이고 $l = 2d$일 때 공식은 $0.28076\ldots$을 주는데, 이는 $\frac{1}{3}\tan 0.7$이다. 또한 컴퓨터로 임의의 점들에 대한 힘과 모멘트 방정식을 확인했고, $\mu_{\min}$보다 조금 크면 평형이 성립하고 조금 작으면 성립하지 않음을 확인했다.

흔한 실수

- 두 수직항력을 같은 방향으로 잡는 것. 막대가 그 아래에 놓인 가로대는 막대를 평면 쪽으로 밀 수만 있다.
- 한쪽 가로대에서만 마찰이 한계 상태라고 가정하는 것. μ를 가능한 한 작게 하려면 두 가로대가 모두 경사면 위쪽으로 최대 마찰력을 제공해야 한다.

STEP 너머

이것은 부등식 제약이 있는 작은 정역학(statics) 문제이다. 접촉력은 선형 방정식과 마찰 부등식을 함께 만족해야 하며, 가장 작은 μ는 실행 가능 집합(feasible set)이 막 공집합이

아니게 되는 지점이다. 선형 방정식과 선형 부등식이 결합된 이와 같은 구조는 선형계획법(linear programming)과 공학에서의 마찰 접촉 해석의 바탕을 이룬다. 강체 정역학과 마찰에 대해 더 알고 싶다면 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.