풀이

STEP II 1995, 문제 8

순수수학 • 로지스틱 미분방정식

STEP II 1995, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q8

이 문제는 *Beyond STEP*의 8.3 절 **개체군 수확하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다:
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch08/harvesting.html

핵심 아이디어

성장 법칙은 로지스틱 방정식(logistic equation)이고, 이는 변수분리형(separable)이다. 부분분수(partial fractions)로 분해하면 적분이 두 로그로 바뀐다. 둘째 부분에서는 새로운 우변을 완전제곱식으로 정리(completing the square)하면, 평행이동 $y = x - K + \alpha$가 새 방정식을 K 대신 α가 들어간 **완전히 똑같은** 로지스틱 방정식으로 바꾼다는 것을 알 수 있다. 따라서 더 이상 적분하지 않고 첫째 답을 그대로 다시 쓸 수 있다.

풀이

제거가 없을 때의 개체 수

$K > 0$으로 둔다($x = K$에서 시작하는 개체 수라면 $K > 0$이어야 한다). 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (2K - x)x.$$

이다. $x = K$에서 출발하면 변화율은 $K^2 > 0$이다. 해는 결코 $x = 0$이나 $x = 2K$에 도달할 수 없다. 이 상수함수들은 그 자체로 해이고, 이 방정식의 해들은 서로 교차할 수 없기 때문이다. 따라서 항상 $0 < x < 2K$이고, $(2K - x)x$로 나눌 수 있다. 부분분수로 나타내면

$$\frac{1}{x(2K - x)} = \frac{1}{2K}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2K - x}\right),$$

이므로, 변수를 분리하면 다음을 얻는다.

$$\frac{1}{2K}\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2K-x}\right)\mathrm{d}x=\int\mathrm{d}t,$$
$$\frac{1}{2K}\Big(\ln x-\ln(2K-x)\Big)=t+C.$$

x와 $2K-x$가 모두 양수이므로 절댓값 기호는 필요 없다. $t=0$에서 $x=2K-x=K$이므로 좌변은 0이고 $C=0$이다. 따라서

$$\ln\frac{x}{2K-x}=2Kt \quad\Longrightarrow\quad x=(2K-x)\,\mathrm{e}^{2Kt} \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{2K\mathrm{e}^{2Kt}}{1+\mathrm{e}^{2Kt}}=\frac{2K}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}.$$

요구된 꼴에 맞추기 위해 $2=(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+(1-\mathrm{e}^{-2Kt})$로 쓰면

$$x(t)=\frac{K(1+\mathrm{e}^{-2Kt})+K(1-\mathrm{e}^{-2Kt})}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}}=K+K\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2Kt}}{1+\mathrm{e}^{-2Kt}},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. (같은 말로, $x=K+K\tanh Kt$이다.)

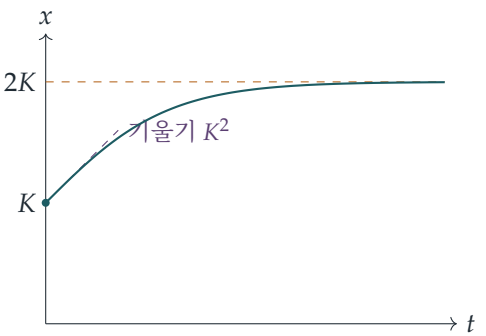
그래프 개형. $t\geq 0$이면 $\mathrm{e}^{-2Kt}\in(0,1]$이므로 $K\leq x<2K$이다. 그러면 $\dot{x}=(2K-x)x>0$이므로 x는 증가한다. 방정식을 한 번 더 미분하면

$$\ddot{x}=(2K-2x)\,\dot{x}\leq 0 \quad \text{왜냐하면} x\geq K,$$

이므로 그래프는 위로 볼록(concave)하고, $t=0$에서의 기울기는 K^2이다(이곳에서 $\ddot{x}=0$이다. 즉 시간의 원점은 S자 모양 로지스틱 곡선 전체의 변곡점(point of inflection)이다). $t\to\infty$일 때 $\mathrm{e}^{-2Kt}\to 0$이므로

$$x(t)\to 2K.$$

이다. 개체 수는 $2K$에서 일정해지며, 아래쪽에서 접근할 뿐 결코 그 값에 도달하지 않는다.



비율 L로 제거할 때

시간당 L마이크로그램을 제거하면 변화율에서 L을 빼게 된다.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(2K-x)x-L.$$

우변을 완전제곱식으로 정리하면

$$(2K-x)x - L = -(x^2-2Kx) - L = K^2 - L - (x-K)^2 = \alpha^2 - (x-K)^2,$$

이고, 여기서 $K^2 > L$이므로 $\alpha = \sqrt{K^2-L} > 0$이다.

> **생각해 보기** 왜 $y = x - K + \alpha$가 올바른 치환(substitution)일까?

우변 $\alpha^2 - (x-K)^2$는 두 평형(equilibrium) 개체 수인 $x = K \pm \alpha$에서 0이 된다. $K-\alpha$만큼 평행이동하면 아래쪽 평형점이 0으로 옮겨지는데, 원래의 로지스틱 방정식에서도 아래쪽 평형점은 바로 그곳에 있었다. $x - K = y - \alpha$이고 $\dot{y} = \dot{x}$이므로

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \alpha^2 - (y-\alpha)^2 = 2\alpha y - y^2 = (2\alpha - y)\,y.$$

이다. 이것은 K 대신 α가 들어간 첫째 방정식이다. 초기 조건도 들어맞는다. $x(0) = K$이면 $y(0) = \alpha$이고, 이는 $x(0) = K$에 대응한다. $\alpha > 0$이므로 첫째 부분이 글자 그대로 적용되고,

$$y(t) = \frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}, \qquad \text{따라서} \qquad x(t) = K - \alpha + \frac{2\alpha}{1+\mathrm{e}^{-2\alpha t}}.$$

이다. $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-2\alpha t} \to 0$이므로 $y \to 2\alpha$이고

$$x(t) \to K - \alpha + 2\alpha = K + \alpha,$$

이므로 요구된 결과를 얻는다. $L > 0$이면 $\alpha < K$이므로, 예상대로 수확되는 개체 수는 더 낮은 수준인 $K + \alpha < 2K$에 자리 잡는다.

검산

- $t = 0$에서 두 공식 모두 $x = K$를 준다. $L = 0$으로 두면 $\alpha = K$이고, 둘째 공식은 첫째 공식인 $2K/(1+\mathrm{e}^{-2Kt})$로 돌아간다.
- $x = K + K\tanh Kt$를 미분하면 $\dot{x} = K^2\operatorname{sech}^2 Kt = K^2(1-\tanh^2 Kt) = (K - K\tanh Kt)(K + K\tanh Kt) = (2K-x)x$이다.
- 수치적으로, $K = 1$이면 $x(1) = 2/(1+\mathrm{e}^{-2}) \approx 1.7616$이고, $K = 1$, $L = 0.75$이면(따라서 $\alpha = \frac{1}{2}$) $x(1) \approx 1.2311$이다. 두 값 모두 미분방정식을 직접 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법) 푼 결과와 일치하며, 둘째 해는 $1.5 = K + \alpha$에 자리 잡는다.

흔한 실수

- 부분분수에서 인수 $\frac{1}{2K}$를 빠뜨려서 e^{-2Kt} 대신 e^{-t}를 얻는 것.
- 둘째 부분에서 $+L$로 쓰거나, 적분상수를 다시 구해야 한다는 것을 잊는 것. 여기서는 치환 덕분에 $y(0) = \alpha$가 되므로 새로운 상수가 필요하지 않다.

STEP 너머

둘째 부분은 **평형점의 안정성**(*stability of equilibria*)을 처음으로 맛보는 것이다. 방정식 $\dot{x} = \alpha^2 - (x - K)^2$는 $K \pm \alpha$에 평형점을 가진다. 위쪽 평형점은 주변의 해들을 끌어당기고, 아래쪽 평형점은 밀어낸다. 아무것도 풀지 않고도 우변의 부호만으로 이를 알 수 있다. 이러한 상선(phase line) 방법과, $L > K^2$일 때 일어나는 일(평형점이 없어서 개체 수가 유한한 시간 안에 사라진다)은 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.