풀이

STEP II 1995, 문제 7

순수수학 • 헤론의 공식

> **STEP II 1995, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q7

핵심 아이디어

처음부터 끝까지 주인공은 내접원(incircle)이다. 내접원의 중심에서 접점(point of contact)으로 그은 반지름은 각 변에 수직이므로, ABC를 빈틈없이 채우는 세 개의 작은 삼각형의 높이가 저절로 주어지고, 이로부터 (i)이 나온다. (ii)는 헤론의 공식(Heron's formula)을 유도하는 고전적인 방법이다. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$로 쓰고, 코사인법칙(cosine rule)으로 각을 없앤 다음, 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한 인수분해를 두 번 한다. 구에 대해서는 수직 단면(cross-section)을 살펴본다. 구가 구멍의 모서리와 접하는 점이 바로 내접원이 각 변에 접하는 점임을 알게 된다.

풀이

소문항 (i)

내접원이 BC, CA, AB에 접하는 점을 각각 P, Q, R'이라 하자. 접점으로 그은 반지름은 접선(tangent)에 수직이므로 $IP \perp BC$, $IQ \perp CA$, $IR' \perp AB$이고, 이들의 길이는 모두 r이다. 따라서 삼각형 BIC는 밑변이 a, 높이가 r이고, 나머지 두 삼각형도 마찬가지이다.

$$[BIC] = \tfrac{1}{2}ar, \qquad [CIA] = \tfrac{1}{2}br, \qquad [AIB] = \tfrac{1}{2}cr.$$

I가 삼각형 내부에 있으므로, 이 세 삼각형은 겹치는 부분 없이 정확히 맞물려 ABC를 이룬다. 더하면

$$\Delta = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs,$$

이므로 증명이 끝난다.

소문항 (ii)

$\Delta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$의 양변을 제곱하고 $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$를 이용하면

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2\alpha) = \tfrac{1}{16}[4b^2c^2 - (2bc\cos\alpha)^2],$$

이고, 이것이 첫 번째 결과이다. 대괄호 안은 제곱의 차이다.

$$16\Delta^2 = (2bc - 2bc\cos\alpha)(2bc + 2bc\cos\alpha).$$

코사인법칙에 의해 $2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$이다. 이것을 각 인수에 대입하면

$$2bc - 2bc\cos\alpha = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2,$$
$$2bc + 2bc\cos\alpha = (b^2 + 2bc + c^2) - a^2 = (b+c)^2 - a^2,$$

이므로

$$\Delta^2 = \tfrac{1}{16}[a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2],$$

이고, 이것이 두 번째 결과이다. 각 대괄호는 다시 제곱의 차이다.

$$16\Delta^2 = (a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a).$$

이제 s를 도입한다. $a+b+c = 2s$이므로

$$b+c-a = 2(s-a), \qquad a-b+c = 2(s-b), \qquad a+b-c = 2(s-c),$$

이고, 따라서 곱은 $2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = 16\,s(s-a)(s-b)(s-c)$이다. 그러므로 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$이다. $\Delta > 0$이므로 양의 제곱근을 택한다.

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

소문항 (iii)

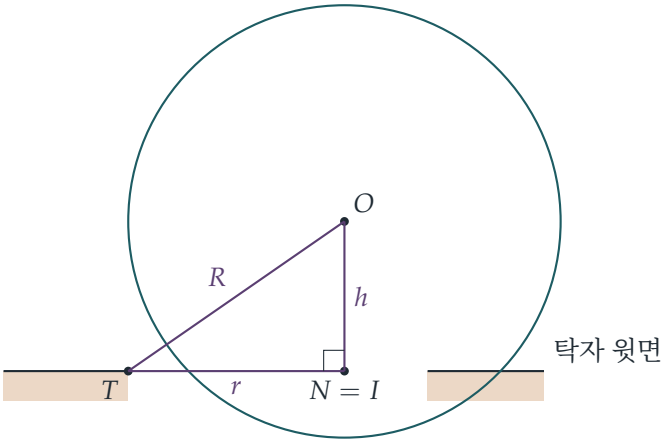
구의 중심을 O, 탁자 윗면으로부터 중심까지의 높이를 h라 하자. O에서 탁자 평면에 내린 수선의 발을 N이라 하면 $ON = h$이다. 구는 구멍의 세 모서리 위에 놓여 있다. 구가 모서리 BC에 점 T에서 접한다고 하자.

? **생각해 보기** 왜 N은 내심(incentre) I이어야 할까?

구가 직선에 접하는 점에서 반지름은 그 직선에 수직이므로 $OT \perp BC$이고 $OT = R$이다. 또 ON은 탁자 평면 전체에 수직이므로 $ON \perp BC$이다. 따라서 BC는 평면 ONT 위의 평행하지 않은 두 직선에 수직이므로 그 평면에 수직이고, 특히 NT에 수직이다. 그러므로 NT는 N에서 BC까지의 거리이고, 직각삼각형 ONT에서 피타고라스 정리(Pythagoras' theorem)에 의해

$$NT^2 = R^2 - h^2.$$

모서리 CA와 AB에 대해서도 같은 논증을 하면, N은 세 변으로부터 모두 같은 거리 $\sqrt{R^2-h^2}$에 있음을 알 수 있다. 점 N은 삼각형 내부에 있고(구는 구멍에 걸쳐 그 위에 놓여 있다), 삼각형 내부에서 세 변으로부터 같은 거리에 있는 점은 내심뿐이다. 따라서 $N=I$이고, 공통 거리는 r이며, 접점은 정확히 내접원이 각 변에 접하는 점이다. 이 점들은 변의 연장선이 아니라 모서리 자체 위에 있으므로, 구는 실제로 세 모서리 위에 놓인다.



그림은 O와 T를 지나는 수직 단면을 나타낸다. 모서리 BC는 T를 지나며 지면에 수직이다. 이제 삼각형 ONT에서 피타고라스 정리에 의해 $h^2=R^2-r^2$이다. (i)과 (ii)로부터

$$r=\frac{\Delta}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}, \qquad \text{이므로} \qquad r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

따라서 구의 중심은 탁자 윗면으로부터 높이

$$h=\sqrt{R^2-\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

에 있다. 이를 위해서는 $R>r$이어야 한다. 내접원보다 크지 않은 구는 구멍으로 그대로 빠져 버린다.

검산

3–4–5 삼각형을 생각하자. $s=6$이고, 헤론의 공식에 의해 $\Delta=\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}=6$이며, 이는 $\frac{1}{2}\cdot3\cdot4$와 일치한다. 그러면 $r=\Delta/s=1$이고, 이는 직각삼각형에 대한 공식 $r=\frac{1}{2}(3+4-5)$로 확인할 수 있다. $R=2$이면 공식에 의해 $h=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}\approx1.732$이다. $R\to r^+$이면 $h\to0$이다. 즉 구가 내려앉아 적도가 탁자 높이와 같아지고, 내접원 위에 놓이게 된다. 더 폭넓은 검산으로, 무작위 삼각형 18,816개에 대해 수치적으로 시험해 보았다. 모든 경우에 내심 위 높이 h에 놓은 중심은 세 모서리 직선 모두로부터 정확히 거리 R에 있었고, 가장 가까운 점들은 모서리 안쪽에 있었다.

흔한 실수

- d를 I에서 **꼭짓점**까지의 거리라 할 때 $h = \sqrt{R^2 - d^2}$로 놓는 것. 구는 꼭짓점이 아니라 모서리에 접한다.
- 근거 없이 중심이 내심 바로 위에 있다고 가정하는 것. 수직에 관한 논증이나, 적어도 명확한 대칭성에 근거한 이유가 필요하다.
- (ii)에서 인수의 짝을 혼동하는 것. $b + c - a = 2(s - a)$이지, $2(s - b)$나 $2(s - c)$가 아니다.

STEP 너머

헤론의 공식은 넓이와 부피에 관한 대칭적인 공식들의 한 갈래에 속한다. 브라마굽타(Brahmagupta)의 공식은 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)에 대해 같은 역할을 하고, 케일리-멩거 행렬식(Cayley–Menger determinant)은 사면체(tetrahedron)의 여섯 모서리의 길이로부터 부피를 구해 준다. "반지름 $\perp$ 접선이므로 수선의 발은 내심이다"라는 단계는 삼수선 정리(theorem of the three perpendiculars)의 3차원 형태로, 벡터 기하를 공부할 때 알아 둘 만하다. 이런 종류의 문제를 더 많이 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.