풀이

STEP II 1995, 문제 6

순수수학 • 1의 거듭제곱근

> **STEP II 1995, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q6

핵심 아이디어

7제곱근인 단위근(roots of unity)은 $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^6$이고, 이들의 합은 0이다. 실수가 아닌 여섯 개를 세 개씩 두 묶음 $\{\alpha, \alpha^2, \alpha^4\}$와 $\{\alpha^3, \alpha^5, \alpha^6\}$로 나눈다. 둘째 묶음은 첫째 묶음의 켤레복소수(complex conjugate)들이므로, 두 묶음의 합은 서로 켤레이다. 따라서 두 합의 합과 곱은 실수이고, 첫째 부분의 결과를 쓰면 이것이 이차방정식(quadratic)의 계수가 된다. 그다음 근의 실수부와 허수부를 취하면 삼각함수의 합을 얻는다.

풀이

근과 계수

u와 v가 $z^2 + az + b = 0$의 근이면, 최고차항의 계수가 1인(monic) 이차식 $z^2 + az + b$는 인수 $z - u$와 $z - v$를 가지므로 모든 z에 대하여

$$z^2 + az + b = (z - u)(z - v) = z^2 - (u + v)z + uv$$

이다. z의 계수와 상수항을 비교하면 $a = -u - v$, $b = uv$를 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

단위근

먼저 주의할 점이 있다. 문제지에는 $z^6 - 1 = 0$이라고 되어 있지만, 이는 $z^7 - 1 = 0$의 오식이다. 실제로 $\alpha^6 = \cos(12\pi/7) + \mathrm{i}\sin(12\pi/7) \neq 1$이며, 문제의 나머지 부분은 분명히 7등분에 관한 것이다. 여기서는 $z^7 - 1 = 0$으로 풀이한다.

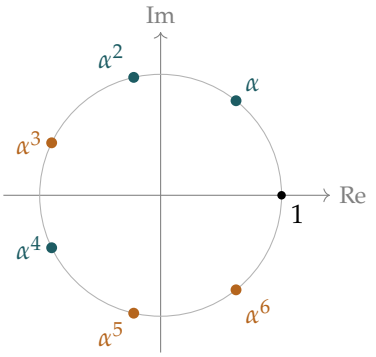
드무아브르(de Moivre)의 정리에 의하여

$$\alpha^7 = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1,$$

이므로 α는 $z^7 - 1 = 0$의 근이다. 더 일반적으로 $\alpha^k = \cos(2k\pi/7) + \mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$이고 $(\alpha^k)^7 = (\alpha^7)^k = 1$이다. 일곱 개의 수

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \alpha^5,\ \alpha^6$$

은 서로 다르다. $k = 0, \ldots, 6$일 때 이들의 편각(argument) $2k\pi/7$이 $[0, 2\pi)$ 안에서 서로 다르기 때문이다. 7차 다항식은 근을 많아야 7개 가지므로, 이것들이 $z^7 - 1 = 0$의 근 전부이다. 이 근들은 단위원(unit circle) 위의 정칠각형(regular heptagon)의 꼭짓점에 놓인다.



두 가지 사실이 모든 일을 해 준다. 첫째, 근들의 합은 0이다. $z^7 - 1 = (z-1)(z^6 + z^5 + \cdots + z + 1)$이고 $\alpha \neq 1$이므로

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = 0. \qquad (*)$$

이다. (같은 말로, $z^7 - 1$에서 z^6의 계수가 0이다.) 둘째, $|\alpha| = 1$이므로 $\overline{\alpha^k} = \alpha^{-k} = \alpha^{7-k}$이다. 따라서 $\alpha^6 = \overline{\alpha}$, $\alpha^5 = \overline{\alpha^2}$, $\alpha^3 = \overline{\alpha^4}$이다.

A와 B 구하기

다음과 같이 놓자.

$$p = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \qquad q = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6.$$

위의 켤레 쌍에 의하여 $q = \overline{p}$이다. 이것이 다른 근에 대한 자연스러운 추측이다. 실수 계수 이차방정식이 실수가 아닌 근 p를 가지면 $\overline{p}$도 반드시 근이기 때문이다.

생각해 보기 p가 실수가 아니라는 것을 어떻게 아는가? 만약 실수라면 "다른 근"이 반드시 $\overline{p}$일 필요는 없다.

p의 허수부(imaginary part)는 $\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}$이고, 이것이 양수임을 마지막에 보인다. 따라서 p는 실수가 아니며 두 근은 p와 $\overline{p}=q$이다. (어쨌든 p와 q를 근으로 갖는 실수 A와 B를 찾고 나면 이차방정식은 결정된다.)

$(*)$에 의하여

$$p+q=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6=-1.$$

이다. 곱은 전개한 뒤 $\alpha^7=1$을 이용하여 거듭제곱의 차수를 줄인다.

$$\begin{aligned}pq&=(\alpha+\alpha^2+\alpha^4)(\alpha^3+\alpha^5+\alpha^6)\\&=\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7+\alpha^5+\alpha^7+\alpha^8+\alpha^7+\alpha^9+\alpha^{10}\\&=\alpha^4+\alpha^6+1+\alpha^5+1+\alpha+1+\alpha^2+\alpha^3\\&=3+(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)=3-1=2.\end{aligned}$$

아홉 개의 항 가운데 세 개의 1을 빼면 $\alpha,\dots,\alpha^6$이 각각 정확히 한 번씩 나타난다는 점에 주목하라. 첫째 부분에 의하여 $A=-(p+q)$, $B=pq$이므로

$$A=1,\qquad B=2,$$

이고, p와 q는 $z^2+z+2=0$의 근, 곧

$$z=\frac{-1\pm\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

이다.

삼각함수의 합

$\alpha^k=\cos(2k\pi/7)+\mathrm{i}\sin(2k\pi/7)$을 써서 $p=\alpha+\alpha^2+\alpha^4$의 실수부(real part)와 허수부를 취하면

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}p&=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7},\\\operatorname{Im}p&=\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{4\pi}{7}+\sin\frac{8\pi}{7}.\end{aligned}$$

이다. $z^2+z+2=0$의 두 근은 모두 실수부가 $-\frac{1}{2}$이므로

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2},$$

이며, 이것이 보이려던 것이다. (또는 $p+\overline{p}=-1$에서 곧바로 $2\operatorname{Re}p=-1$을 얻는다.)

허수부는 $\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$이며, 어느 쪽인지 결정해야 한다.

생각해 보기 세 사인값 가운데 둘은 양수이고 하나는 음수이다. 어느 쪽이 이기는지 어떻게 확신할 수 있는가?

음수인 항을 양수인 항 하나와 비교한다. $\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}$이므로 $\sin\frac{8\pi}{7} = -\sin\frac{\pi}{7}$이다. 또 $\sin\frac{4\pi}{7} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = \sin\frac{3\pi}{7}$이다. 사인 함수는 $[0, \frac{\pi}{2}]$에서 순증가(strictly increasing)하고 $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{3\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$이다. 따라서

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin\frac{2\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\right)}_{>0} > 0,$$

이고, 그러므로

$$\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

이다. 이로써 앞에서 사용한 대로 $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$가 실수가 아니라는 것도 확인된다.

검산

계산기로 (라디안 단위로) 계산하면 $\cos\frac{2\pi}{7} \approx 0.6235$, $\cos\frac{4\pi}{7} \approx -0.2225$, $\cos\frac{8\pi}{7} \approx -0.9010$이고, 이들의 합은 -0.5000이다. 사인값은 약 0.7818, 0.9749, -0.4339이고, 합은 1.3229이다. 이는 $\frac{\sqrt{7}}{2} \approx 1.3229$와 일치한다. $p^2 + p + 2 = 0$을 직접 확인할 수도 있다. $p = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{7}}{2}$이면 $p^2 = \frac{-6-2\mathrm{i}\sqrt{7}}{4}$이고, 여기서 $p^2 + p + 2 = 0$이 따라 나온다.

흔한 실수

- 인쇄된 대로 $z^6 - 1 = 0$을 사용하는 것. 그러면 α는 근이 아니며, 합이 0이라는 사실 $(*)$도 성립하지 않는다.
- pq를 전개할 때 $\alpha^7 = 1$로 차수를 줄이는 것을 잊거나, 1과 같은 세 항을 잘못 세는 것.
- 사인의 합이 "두 항이 양수이므로" 양수라고 주장하는 것. $\sin\frac{3\pi}{7} > \sin\frac{\pi}{7}$와 같은 비교가 필요하다.

STEP 너머

$\{1, 2, 4\}$와 $\{3, 5, 6\}$으로 나눈 것은 임의로 정한 것이 아니다. 수 1, 2, 4는 7을 법(modulo)으로 하는 0이 아닌 제곱수들이고, $2p + 1 = \mathrm{i}\sqrt{7}$은 **가우스 합**(Gauss sum)이다. 가우스(Gauss)는 $4k + 3$ 꼴의 소수 ℓ에 대하여 이차잉여(quadratic residue) r에 걸친 α^r의 합이 $\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{\ell}}{2}$임을 보였다. 이것은 어떤 정다각형을 자와 컴퍼스로 작도할 수 있는가에 관한 이론(갈루아 이론(Galois theory))과 이차 상호 법칙(quadratic reciprocity)의 첫걸음이

다. Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론)은 이차잉여를 다루고, Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 단위근을 기하학적으로 바라보는 관점을 제공한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.