풀이

STEP II 1995, 문제 5

순수수학 • 최적화와 오목성

STEP II 1995, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

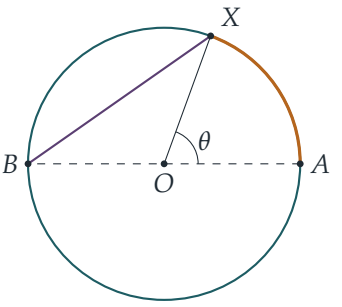
step.maths.org/questions/95-s2-q5

핵심 아이디어

선택 (i)과 (iii)은 (ii)의 경로들을 양 끝으로 밀어붙인 경우이다. $\theta \to 0$이면 곧장 가로질러 헤엄치는 것이고, $\theta \to \pi$이면 끝까지 달려가는 것이다. 따라서 전체 시간을 $[0, \pi]$에서 정의된 θ의 함수로 나타내고, 그 최솟값이 어디에서 나타나는지 살펴본다. 놀랍게도 이 함수는 오목(concave)하므로 유일한 정류점(stationary point)은 최댓값이고, 가장 좋은 경로는 언제나 양 끝 중 하나이다.

풀이

수영장의 반지름을 길이 1단위로, 그녀의 수영 속력을 1로 잡으면 달리는 속력은 k이다. 이때 시간의 단위는 (반지름)/(수영 속력)이 되며, 이는 비교 결과에 아무런 영향을 주지 않는다.



세 가지 시간

(i) 길이가 2인 지름(diameter) AB를 헤엄쳐 건너므로 시간 2가 걸린다.

(iii) 길이가 π인 반원을 달리므로 시간 π/k가 걸린다.

(ii) 길이가 θ인 (반지름이 1이므로) 호 AX를 시간 θ/k 동안 달린다. $\angle AOB = \pi$이므로 $\angle XOB = \pi - \theta$이다. 삼각형 XOB는 $OX = OB = 1$인 이등변삼각형(isosceles triangle)이므로 현(chord)의 길이는

$$XB = 2\sin\tfrac{\pi-\theta}{2} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}.$$

이다. (같은 말이지만, AB가 지름이므로 $\angle AXB = \frac{\pi}{2}$이고, 이등변삼각형 AOX로부터 $\angle XAB = \frac{\pi-\theta}{2}$이므로 $XB = 2\sin\angle XAB$이다.) 전체 시간은

$$T(\theta) = \frac{\theta}{k} + 2\cos\frac{\theta}{2}, \qquad 0 < \theta < \pi.$$

이다. 이 식은 양 끝에서도 의미가 있다. $T(0) = 2$는 (i)의 시간이고 $T(\pi) = \pi/k$는 (iii)의 시간이다. 따라서 세 가지 선택이 모두 $[0, \pi]$에서 연속인 하나의 함수로 표현된다.

T는 어디에서 가장 작은가?

미분하면

$$T'(\theta) = \frac{1}{k} - \sin\frac{\theta}{2}, \qquad T''(\theta) = -\tfrac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}.$$

이다. $0 < \theta < \pi$이면 $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2} > 0$이고 $T''(\theta) < 0$이다. 즉 함수 T는 $[0, \pi]$에서 순오목(strictly concave)하다.

> **생각해 보기** $k > 1$이면 $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{k}$인 곳에 정류점이 있다. 그곳이 물에 뛰어들기에 가장 좋은 지점이 아닐까?

그렇지 않다. 그곳에서 $T'' < 0$이므로 그 점은 **최댓값**이 되는 곳, 즉 뛰어들기에 가장 나쁜 지점이다. 더 일반적으로, 닫힌구간에서 순오목인 함수는 양 끝값을 잇는 현보다 엄격하게 위에 있으므로, $0 < \theta < \pi$인 모든 θ에 대하여

$$T(\theta) > \Big(1 - \frac{\theta}{\pi}\Big)T(0) + \frac{\theta}{\pi}\,T(\pi) \geq \min(T(0),\, T(\pi)).$$

이다. 따라서 k의 값이 무엇이든, X를 내부의 어느 점으로 택하더라도 (i)과 (iii) 중 더 나은 쪽만큼 빠를 수는 결코 없다. ($k \leq 1$이면 이를 더 직접적으로 알 수 있다. 이때 $\sin\frac{\theta}{2} < 1 \leq \frac{1}{k}$이므로 $(0, \pi)$에서 $T'(\theta) > 0$이고, 따라서 T는 증가함수이며 곧바로 헤엄치는 것이 가장 좋다.)

(i)과 (iii)의 비교

이제 $T(0) = 2$와 $T(\pi) = \pi/k$를 비교하기만 하면 된다.

- $k < \frac{\pi}{2}$이면 $\pi/k > 2$이므로 **곧바로 헤엄쳐야** 한다. 선택 (i)이다.
- $k > \frac{\pi}{2}$이면 $\pi/k < 2$이므로 **끝까지 둘레를 달려야** 한다. 선택 (iii)이다.

- $k = \frac{\pi}{2}$이면 (i)과 (iii)의 시간이 같고, 어느 쪽이든 가장 좋다.

물리적인 이유는 단순하다. 반원의 길이가 지름의 $\frac{\pi}{2}$배이기 때문이다.

마지막으로, 선택 (ii)는 그녀가 결코 택하지 않을 경로이다. 모든 $k > 0$와 모든 $\theta \in (0, \pi)$에 대하여 (ii)는 (i)과 (iii) 중 더 나은 쪽보다 엄격하게 느리다.

검산

$k = 3$이면 달리는 데 $\pi/3 \approx 1.047$이 걸려 헤엄치는 시간 2보다 빠르다. 정류점은 $\theta = 2\arcsin\frac{1}{3} \approx 0.680$에 있고, 그곳에서 $T \approx 2.112$이므로 양 끝 어느 쪽보다도 느리다. 최댓값이라면 당연히 그래야 한다. 컴퓨터로 e^{-4}와 e^{4} 사이의 무작위 k 수천 개에 대하여 촘촘한 θ 격자에서 T를 계산해 보았는데, $\min(2, \pi/k)$보다 작은 내부의 값은 한 번도 나오지 않았고, 전환점이 $k = \pi/2 \approx 1.571$임도 확인되었다.

흔한 실수

- $T'(\theta) = 0$으로 놓고 그 결과의 성질을 확인하지 않은 채 최적이라고 선언하는 것. 여기서 그 점은 최댓값이다.
- 현 대신 호 XB를 사용하거나, 현의 길이를 $2\sin\frac{\theta}{2}$로 구하는 것. (그것은 XB가 아니라 AX이다.)
- 정류점이 아예 없는 $k \leq 1$인 경우를 빠뜨리는 것.

STEP 너머

여기서 작동하는 원리는 구간에서 오목인 함수가 끝점에서 최솟값을 가진다는 것이다. 고차원에서는 이것이 다각형 위에서 선형(또는 오목) 목적함수가 꼭짓점에서 최소가 된다는 사실이 되며, 이는 선형계획법(linear programming)의 토대이다. 이 문제는 스넬의 법칙(Snell's law)과 페르마(Fermat)의 최소 시간 원리(principle of least time)와도 가까운 사이인데, 그 경우에는 시간 함수가 오히려 볼록(convex)하기 때문에 보통 답이 내부의 점이 된다. 이런 느낌의 문제를 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제집)를 살펴보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.