풀이

STEP II 1995, 문제 4

순수수학 • 월리스 점화식

STEP II 1995, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q4

이 문제는 *Beyond STEP*의 4.4 절 **월리스, 베타 함수, 그리고 $1/2$의 계승**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch04/wallis-beta.html

핵심 아이디어

부분적분(integration by parts)을 하면 $\cos^2 t$가 $1-\sin^2 t$로 바뀌고, 이로부터 u_n과 u_{n-2}를 잇는 점화식(reduction formula)을 얻는다. 이 식에 u_{n-1}을 곱하면 n이 커져도 nu_nu_{n-1}의 값이 변하지 않는다는 것을 알 수 있으므로, 이 값은 $n=1$일 때의 값과 같다. 그다음은 조임(squeeze) 문제이다. u_n이 감소하므로 곱 u_nu_{n-1}은 u_n^2과 u_{n-1}^2 사이에 있다.

풀이

점화식

$n \geq 2$라 하자. $u_n = \int_0^{\pi/2} \sin t \, \sin^{n-1} t \, \mathrm{d}t$로 쓰고, $\sin^{n-1} t$는 미분하고 $\sin t$는 적분하여 $-\cos t$로 만드는 부분적분을 한다.

$$\begin{aligned} u_n &= \Big[-\cos t \, \sin^{n-1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, \sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\sin^{n-2} t \, \mathrm{d}t \\ &= (n-1)(u_{n-2} - u_n). \end{aligned}$$

경계항(boundary term)이 사라지는 것은 위끝에서 $\cos\frac{\pi}{2} = 0$이고 아래끝에서 $\sin 0 = 0$이기 때문이다(여기서 $n-1 \geq 1$을 이용한다). u_n 항을 한쪽으로 모으면

$$nu_n = (n-1)u_{n-2} \qquad (n \geq 2).$$

양변에 u_{n-1}을 곱하면

$$nu_nu_{n-1} = (n-1)u_{n-1}u_{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

일정한 곱

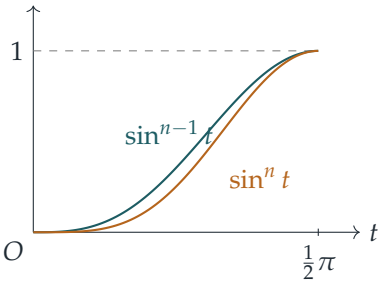
$n \geq 1$에 대하여 $p_n = nu_nu_{n-1}$이라 하자. 앞의 결과는 모든 $n \geq 2$에 대하여 $p_n = p_{n-1}$임을 말하므로, 모든 $n \geq 1$에 대하여 $p_n = p_1$이다. 이제

$$u_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\pi, \qquad u_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\pi/2} = 1,$$

이므로 $p_1 = 1 \cdot u_1u_0 = \frac{1}{2}\pi$이다. 따라서

$$nu_nu_{n-1} = \tfrac{1}{2}\pi \qquad \text{모든} n \geq 1.$$

그래프와 $0 < u_n < u_{n-1}$



두 곡선 모두 $t = 0$에서 0으로 시작하여 증가하고, $t = \frac{1}{2}\pi$에서 1에 이른다(그림은 $n = 4$인 경우이며, $n = 1$이면 위쪽 곡선은 직선 $y = 1$이다). $0 < t < \frac{1}{2}\pi$에서는 $0 < \sin t < 1$이므로

$$0 < \sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t < \sin^{n-1} t.$$

따라서 $\sin^n t$의 그래프는 양 끝점을 제외하면 $\sin^{n-1} t$의 그래프보다 엄격하게 아래에 있다. 두 함수는 모두 연속(continuous)이므로, 그래프 아래의 넓이는

$$0 < u_n < u_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

을 만족한다.

? **생각해 보기** 두 곡선이 양 끝에서 만나는데도 왜 부등식이 엄격하게 성립하는가?

차 $\sin^{n-1} t - \sin^n t$는 연속이고, 결코 음수가 아니며, (예를 들어) $t = \frac{1}{4}\pi$에서 양수이다. 어떤 점에서 양수인 연속함수는 그 점 근방의 작은 구간에서 양수이므로, 양의 넓이를 둘러싼

다. 고립된 두 점에서 만난다는 사실은 이를 바꾸지 못한다. 같은 논증으로 $u_n > 0$임도 알 수 있다.

양쪽 경계

$n \geq 1$이라 하자. $u_n > 0$이므로 $u_n < u_{n-1}$의 양변에 nu_n을 곱하면 $nu_n^2 < nu_nu_{n-1}$이다. $u_{n-1} > 0$이므로 양변에 nu_{n-1}을 곱하면 $nu_nu_{n-1} < nu_{n-1}^2$이다. 가운데 값은 $\frac{1}{2}\pi$이므로

$$nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1).$$

조임과 극한

오른쪽 부등식은 모든 $n \geq 1$에 대하여 성립하므로, n 대신 $n+1$을 넣어 적용할 수 있다.

$$\tfrac{1}{2}\pi < (n+1)u_n^2, \qquad \text{따라서} \qquad nu_n^2 > \frac{n}{n+1} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

이것을 왼쪽 부등식과 합치면

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\tfrac{1}{2}\pi < nu_n^2 < \tfrac{1}{2}\pi.$$

$n \to \infty$일 때 $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$이므로 아래 경계는 $\frac{1}{2}\pi$로 수렴(converge)한다. 위 경계는 $\frac{1}{2}\pi$ 자체이다. 조임 정리(squeeze theorem, sandwich theorem)에 의하여

$$nu_n^2 \to \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{단, } n \to \infty.$$

검산

- 점화식에서 $u_2 = \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{4}\pi$이고, 이는 $\int_0^{\pi/2} \sin^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\pi$와 일치한다($\sin^2$의 평균은 $\frac{1}{2}$이다). 그러면 예측대로 $2u_2u_1 = \frac{1}{2}\pi$이다.
- 수치적으로(심프슨 공식(Simpson's rule)) 계산하면 $u_{10} \approx 0.38656$이고, 이는 $\frac{63}{512}\pi$이다. 따라서 $10u_{10}^2 \approx 1.4943$이며, 이 값은 $\frac{10}{11} \cdot \frac{1}{2}\pi \approx 1.4280$과 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$ 사이에 있다.
- 점화식을 $n = 10^5$까지 돌리면 $nu_n^2 \approx 1.570788$로, 이미 $\frac{1}{2}\pi$에 매우 가깝다.

흔한 실수

- 점화식이 $n \geq 2$에서만 성립한다는 것을 잊는 것. 따라서 상수는 u_1과 u_2만이 아니라 u_0과 u_1을 이용해 정해야 한다.
- 단지 $\sin^n t \leq \sin^{n-1} t$라는 이유만으로 $u_n < u_{n-1}$이라고 주장하는 것. 이것으로는 $\leq$만 얻는다. 엄격한 부등식을 얻으려면 어떤 구간에서 부등식이 엄격하게 성립해야 한다.

- $\frac{1}{2}\pi < nu_{n-1}^2$에서 곧바로 아래 경계를 얻으려는 것. 이 식은 u_n이 아니라 u_{n-1}의 경계이므로, 먼저 첨자를 옮겨야 한다.

STEP 너머

이 적분들은 월리스(Wallis) 적분(Wallis's integrals)이다. u_{2m}과 u_{2m+1}을 곱의 꼴로 쓰고 $nu_n^2 \to \frac{1}{2}\pi$를 이용하면 월리스 곱(Wallis's product) $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots$을 얻는다. 같은 추정으로 스털링(Stirling) 공식(Stirling's formula) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/\mathrm{e})^n$의 상수 $\sqrt{2\pi}$도 정해진다. 여기서 사용한 조임 논증은 대학 1학년 해석학(analysis)의 표준 도구이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)에서 이를 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.