풀이

STEP II 1995, 문제 3

순수수학 • 논리적 추론과 경우의 수

STEP II 1995, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q3

핵심 아이디어

이 문제는 겉모습만 바꾼 논리 퍼즐이며, 실마리는 세기(counting)이다. 매 스테이지마다 $5+4+3+2+1=15$점이 배분되므로 다섯 선수의 점수 합은 이미 정해져 있다. 아루에(Arouet)의 점수는 최댓값에 아주 가까워서 그의 결과 대부분이 결정된다. 그다음에는 엘뤼아르(Eluard)의 결과가 엘뤼아르의 점수를 양쪽에서 조여 오고, 카뮈(Camus)가 "같은 순위를 네 번" 했다는 조건 때문에 확인할 경우가 몇 개만 남는다.

풀이

선수들의 총점을 A, B, C, D, E로 나타낸다. 문제에서 $A > B > C > D > E$이고 $A = 24$라고 주어졌다.

총점과 아루에의 스테이지

각 스테이지마다 15점이 배분되므로, 다섯 스테이지 전체에서

$$A+B+C+D+E = 75, \qquad \text{따라서} \qquad B+C+D+E = 51.$$

아루에가 얻을 수 있는 점수는 최대 $5\times 5 = 25$점이다. 24점을 얻었다는 것은 정확히 1점을 잃었다는 뜻이므로, 아루에는 네 스테이지에서 1위, 한 스테이지에서 2위를 했다. 엘뤼아르가 스테이지 5에서 우승했으므로 아루에의 2위는 스테이지 5에서 나온 것이어야 하고, 아루에는 스테이지 1–4에서 우승했다.

엘뤼아르가 11점을 얻은 이유

하한(*lower bound*). 엘뤼아르는 스테이지 4에서 3점, 스테이지 5에서 5점을 얻었고, 나머지 세 스테이지에서는 각각 적어도 1점을 얻었다. 따라서 $E \geq 3+5+3 = 11$이다.

상한(*upper bound*). 점수는 서로 다른 정수이고 $B > C > D > E$이므로 $D \geq E+1$, $C \geq E+2$, $B \geq E+3$이다. 그러므로

$$51 = B+C+D+E \geq 4E+6, \qquad \text{따라서} \qquad E \leq \tfrac{45}{4} < 12.$$

두 부등식을 합치면 $E = 11$이다. 하한에서 등호가 성립한다는 사실로부터, 엘뤼아르가 스테이지 1, 2, 3에서 모두 **꼴찌**를 했다는 것도 알 수 있다.

바르트, 카뮈, 디드로에게 남은 것

이제 모든 스테이지에서 아루에와 엘뤼아르의 순위를 알았으므로, 바르트(Barthes), 카뮈, 디드로(Diderot)는 남은 순위를 나누어 가졌다.

스테이지	아루에, 엘뤼아르	B, C, D에게 남은 순위	
1, 2, 3	1위, 5위	2위, 3위, 4위	(4, 3, 2점)
4	1위, 3위	2위, 4위, 5위	(4, 2, 1점)
5	2위, 1위	3위, 4위, 5위	(3, 2, 1점)

또한 $B+C+D = 51-11 = 40$이고 $B > C > D > 11$이므로 $D \geq 12$, $C \geq 13$이다.

? **생각해 보기** 카뮈는 같은 순위를 네 번 했다. 위의 표를 보면 그 순위는 무엇일 수 있는가?

답은 2위, 3위, 4위 중 하나이다. 카뮈가 5위를 할 수 있었던 것은 스테이지 4와 5뿐인데, 이는 네 번이 아니라 두 번이다. 세 가지 가능성을 차례로 살펴본다.

카뮈가 네 번 2위를 한 경우. 2위는 스테이지 1–4에서만 가능했으므로, 카뮈는 이 네 스테이지 모두에서 2위를 했다. 그러면 바르트는 스테이지 1–3에서 각각 최대 3점, 스테이지 4에서 최대 2점, 스테이지 5에서 최대 3점을 얻었다. 따라서 $B \leq 9+2+3 = 14$이다. 그런데 $C \geq 4 \times 4 = 16 > B$이므로 모순이다.

카뮈가 네 번 4위를 한 경우. 4위는 모든 스테이지에서 2점이므로, 카뮈가 얻을 수 있는 최고 총점은 $4 \times 2 + 4 = 12$이다(나머지 한 스테이지에서 2위를 한 경우). 이는 $C \geq 13$에 모순이다.

카뮈가 네 번 3위를 한 경우. 3위는 스테이지 1, 2, 3, 5에서 가능했고 매번 3점이므로, 이것이 카뮈의 네 번의 3위이다. 스테이지 4에서 카뮈는 $x \in \{4, 2, 1\}$점을 얻었고, $C = 12+x$이다.

- $x = 4$: $C = 16$이므로 $B \geq 17$이고 $D = 40-B-C \leq 7$이다. 이는 $D \geq 12$에 모순이다.

- $x = 2$: $C = 14$이므로 $B \geq 15$이고 $D \leq 11$이다. 역시 모순이다.
- $x = 1$: $C = 13$이므로 $B + D = 27$이고, $B \geq 14$, $12 \leq D \leq 12$이다. 따라서 $D = 12$, $B = 15$이다.

따라서 점수는 다음과 같다.

$$\boxed{B = 15, \quad C = 13, \quad D = 12} \qquad (\text{단, } A = 24,\ E = 11).$$

마지막 스테이지에서의 바르트

> **생각해 보기** 총점은 알았지만 스테이지별 결과는 아직 모른다. 스테이지 5의 결과를 확정할 만한 정보가 충분한가?

충분하며, 홀짝성 논증(parity argument)으로 확정된다. 카뮈가 스테이지 1, 2, 3, 5에서 3위, 스테이지 4에서 5위를 했으므로, 바르트와 디드로는 스테이지 1–4 각각에서 4점과 2점짜리 순위를 나누어 가졌다. 스테이지 5에서는 2점과 1점짜리 순위(4위와 5위)를 나누어 가졌다. 디드로가 스테이지 1–4 중 k개에서 4점짜리 순위를 차지했고 스테이지 5에서 $s \in \{1, 2\}$점을 얻었다고 하자. 그러면

$$D = 4 \times 2 + 2k + s = 8 + 2k + s = 12.$$

따라서 $s = 4 - 2k$는 짝수이므로 $s = 2$(그리고 $k = 1$)일 수밖에 없다. 디드로가 마지막 스테이지에서 4위를 했으므로, **바르트는 마지막 스테이지에서 꼴찌(5위)를 했다.**

이러한 투어는 실제로 존재한다. 예를 들어 스테이지 1: A, D, C, B, E; 스테이지 2와 3: A, B, C, D, E; 스테이지 4: A, B, E, D, C; 스테이지 5: E, A, C, D, B로 두면, 요구한 대로 $24, 15, 13, 12, 11$을 얻는다.

검산

- 총점의 합이 맞는다: $24 + 15 + 13 + 12 + 11 = 75 = 5 \times 15$.
- 예시 투어에서 카뮈는 네 스테이지에서 3위이고, 엘뤼아르는 스테이지 4에서 3위, 스테이지 5에서 1위이다.
- 가능한 스테이지 결과 120^5가지를 모두 컴퓨터로 탐색하여 모든 조건을 만족하는 것만 남기면, 점수는 $(24, 15, 13, 12, 11)$뿐이다. 모든 경우에 바르트는 스테이지 5에서 5위이다. (조건을 만족하는 투어는 정확히 네 가지이며, 디드로가 스테이지 1–4 중 어느 스테이지에서 2위를 했는지에 따라 달라진다.)

흔한 실수

- $E \geq 11$만 보이는 것. 문제는 엘뤼아르가 왜 11점이어야 **하는지**를 묻고 있으므로, $B + C + D + E = 51$과 점수가 서로 다르다는 사실에서 얻는 상한이 반드시 필요하다.
- 카뮈가 **연속된** 네 스테이지에서 같은 순위를 했다고 가정하거나, 4위인 경우를 빠뜨리는 것.
- 점수는 구했지만 마지막 스테이지의 순위가 반드시 그렇게 정해진다는 것을 증명하지 않는 것. 예시 투어 하나로는 충분하지 않다. 홀짝성 논증은 가능한 모든 투어에서 바르트가 스테이지 5에서 꼴찌임을 보여 준다.

STEP 너머

이 논증은 세 단계로 이루어진다. 보존 법칙(conservation law)(고정된 총점), 극단적 추론(extremal reasoning)(24점은 거의 최댓값이다), 그리고 홀짝성 논증이다. 이 세 가지는 모두 조합론(combinatorics)에서 거듭 등장한다. 어떤 양을 양쪽에서 조여 값이 하나로 정해지게 만드는 것은 해석학(analysis)과 올림피아드 문제 풀이의 기본 기법이기도 하다. 이런 유형의 퍼즐을 더 풀어 보고 싶다면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*를 보라. Engel의 *Problem-Solving Strategies*에는 불변성 원리(invariance principle)와 극단 원리(extremal principle)를 다루는 장이 각각 통째로 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.