풀이

STEP II 1995, 문제 2

순수수학 • 재귀적인 색칠 방법 세기

STEP II 1995, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q2

이 문제는 *Beyond STEP*의 9.3 절 **울타리 기둥 색칠하기**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch09/fence-posts.html

핵심 아이디어

첫 번째 기둥이 빨간색인 색칠(colouring)을 마지막 기둥의 색에 따라 나눈다. 일렬로 선 기둥의 색칠은 기둥을 하나씩 덧붙여 가며 만들어지고, 새로 덧붙이는 기둥마다 허용되는 색은 정확히 두 가지이므로 전체 개수는 쉽게 셀 수 있다. 점화식(recurrence)이 필요한 부분은 "빨간색으로 끝나는 것"과 "빨간색이 아닌 색으로 끝나는 것"으로 나누는 일이다. 원형의 경우는 양 끝 기둥의 색도 서로 달라야 하는 직선일 뿐이다.

풀이

$r_{n+1} = s_n$인 이유

첫 번째 기둥과 마지막 기둥이 빨간색인 $n+1$개 기둥의 올바른 색칠을 하나 생각하자. 기둥 n은 빨간색인 기둥 $n+1$과 이웃하므로 기둥 n은 빨간색이 아니다. 따라서 기둥 $n+1$을 지우면 첫 번째 기둥이 빨간색이고 마지막 기둥이 빨간색이 아닌 n개 기둥의 올바른 색칠, 즉 s_n개의 색칠 가운데 하나가 남는다.

거꾸로, n개 기둥의 s_n개 색칠 가운데 하나가 주어지면 기둥 n이 빨간색이 아니므로 끝에 빨간 기둥을 하나 덧붙일 수 있고, 그러면 r_{n+1}에서 세는 색칠이 하나 얻어진다. 이 두 조작은 서로를 되돌리므로 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이루고,

$$r_{n+1} = s_n.$$

$r_n + s_n$ 구하기

첫 번째 기둥이 빨간색인 올바른 색칠은 모두 빨간색으로 끝나거나 다른 색으로 끝나므로, $r_n + s_n$은 첫 번째 기둥이 빨간색인 올바른 색칠 전체의 개수이다. 기둥을 차례로 칠해 보자. 첫 번째 기둥은 빨간색이고(한 가지), 그 뒤의 각 기둥은 바로 앞 기둥의 색만 아니면 어떤 색이든 될 수 있으므로, 앞에서 무슨 일이 있었든 매번 2가지 선택이 있다. 따라서

$$r_n + s_n = 2^{n-1}.$$

$r_{n+1} + r_n$ 구하기

$s_n = r_{n+1}$을 대입하면

$$r_{n+1} + r_n = 2^{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

귀납법

$P(n)$을 명제 $r_n = \frac{1}{3}\left(2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}\right)$라 하자.

기저 단계(*base case*). 기둥이 하나뿐이고 그 기둥을 빨간색으로 칠하면, 그 기둥은 첫 번째 기둥이자 마지막 기둥이므로 $r_1 = 1$이다. 공식은 $\frac{1}{3}(1+2) = 1$을 주므로 $P(1)$이 성립한다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다고 가정하자. 앞의 결과에 의하여

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 2^{n-1} - r_n \\ &= \frac{3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1}}{3} \\ &= \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{aligned}$$

이고, 여기서 $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$과 $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$을 이용하였다. 이것은 정확히 $P(n+1)$이다. 수학적 귀납법(induction)에 의하여 모든 $n \geq 1$에 대하여 $P(n)$이 성립한다.

? **생각해 보기** 왜 귀납법을 $n = 2$에서 시작하거나 기저 단계를 두 개 쓰지 않는가?

점화식 $r_{n+1} = 2^{n-1} - r_n$은 각 항을 바로 앞의 항 하나만으로 나타내므로 기저 단계는 하나로 충분하다. 두 항에 관한 점화식이라면 기저 단계가 두 개 필요할 것이다.

원형으로 놓인 기둥

원을 따라 기둥에 $1, 2, \ldots, n$으로 번호를 붙이면, 이제 기둥 n은 기둥 1과도 이웃한다. 원형의 올바른 색칠은 정확히 직선 $1, 2, \ldots, n$의 올바른 색칠 가운데 추가로 기둥 n의 색이 기둥 1과 다른 것이다.

생각해 보기 첫 번째 기둥이 빨간색으로 고정되지 않은 색칠은 어떻게 세는가?

대칭성(symmetry)을 이용한다. 두 색의 이름을 맞바꾸면 올바른 색칠은 올바른 색칠로 옮겨지므로, 기둥 1의 색을 어떻게 고르든 색칠의 개수는 같다. 기둥 1이 빨간색일 때, 마지막 기둥의 색이 첫 번째 기둥과 다른 직선 색칠은 정확히 s_n에서 세는 것들이다. 따라서 원형 색칠의 개수는

$$\begin{aligned} 3s_n &= 3\left(2^{n-1} - r_n\right) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2^{n-1} - 2(-1)^{n-1} \\ &= 2^n + 2(-1)^n. \end{aligned}$$

여기서 기둥들은 서로 구별되므로(정해진 자리에 서 있으므로), 회전하여 겹쳐지는 두 색칠도 따로 센다.

검산

- 작은 경우를 직접 확인한다. $r_2 = 0$(이웃한 두 기둥이 모두 빨간색일 수는 없다)이고 $r_3 = 2$(RWR, RBR)이며, 이는 $\frac{1}{3}(2-2) = 0$, $\frac{1}{3}(4+2) = 2$와 일치한다.
- 세 기둥이 삼각형을 이루면 세 색을 모두 써야 하므로 $3! = 6$가지이고, $2^3 + 2(-1)^3 = 6$이다. 네 기둥이 정사각형을 이루면 $16 + 2 = 18$이다.
- $n \leq 12$에 대하여 모든 색칠을 하나하나 센 결과는 위의 모든 공식과 일치한다. 예를 들어 $r_{10} = 170$, $s_{10} = 342$이고, 10개 기둥의 원형 색칠은 1026가지이다.

흔한 실수

- 기둥 1이 빨간색일 필요가 없다는 것을 잊고 원형의 답으로 r_n이나 s_n을 쓰는 것. 인수 3이 나머지 두 색의 경우를 되살려 준다.
- 회전을 없애려고 n으로 나누는 것. 기둥들은 정해진 자리에 있으므로, 회전한 색칠은 서로 다른 칠하기이다.

STEP 너머

원형의 답 $2^n + 2(-1)^n$은 순환 그래프(cycle graph) C_n의 **채색 다항식**(*chromatic polynomial*)의 $k = 3$에서의 값이다. 일반적으로 k가지 색에 대한 채색 다항식은 $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$이며, 같은 "직선을 만든 뒤 양 끝을 잇는" 논법으로 증명된다. 채색 다항식과 $r_{n+1} + r_n = 2^{n-1}$ 같은 점화식은 조합론(combinatorics)이나 그래프 이론(graph theory)

입문 과목에서 다루는 표준적인 내용이다. 이런 성격의 문제를 더 보려면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.