풀이

STEP II 1995, 문제 12

확률과 통계 • 순차적 결투

> **STEP II 1995, 12번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s2-q12

이 문제는 *Beyond STEP*의 12.13 절 **삼자 결투**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch12/truel.html

핵심 아이디어

누군가 맞을 때까지 계속되는 결투에서는 두 사람이 모두 빗나갈 때마다 게임이 "처음부터 다시" 시작된다. 따라서 구하려는 확률(probability)은 자기 자신을 이용한 간단한 방정식을 만족하고, 무한급수(infinite series)를 더할 필요가 없다(물론 더해도 된다). 삼자 결투에서는 앨저넌(Algernon)의 첫 발에 대한 각 선택이 곧바로 두 사람의 결투로 바뀌고, 이는 첫 번째 결과로 처리할 수 있다. 놀라운 점은 앨저넌의 최선의 수가 아무도 맞히지 않는 것이라는 사실이다.

풀이

두 사람의 결투

퍼시(Percy)가 먼저 던질 때 퍼시가 이길 확률을 P라 하자. 첫 번째 두 번의 던지기를 살펴보자.

- 퍼시가 첫 번째 던지기에서 맞히면(확률 p) 퍼시가 곧바로 이긴다.
- 퍼시가 빗나가고 로드니(Rodney)가 맞히면(확률 $(1-p)r$) 퍼시가 진다.
- 둘 다 빗나가면(확률 $(1-p)(1-r)$) 퍼시가 던질 차례인 처음 상태로 돌아간다. 각 던지기는 독립(independent)이므로, 여기서부터 퍼시가 이길 확률은 다시 P이다.

따라서

$$P = p + (1-p)(1-r)P \quad \Longrightarrow \quad P\big(1-(1-p)(1-r)\big) = p \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p}{p+r-pr},$$

이다. 여기서 $1-(1-p)(1-r) = p+r-pr$이고, $p > 0$이므로 이 값은 양수이다. 이것이 구하려는 결과이다.

생각해 보기 게임은 반드시 끝나는가? 즉 퍼시가 지는 것이 정말로 로드니가 이기는 것과 같은가?

그렇다. 처음 n번의 라운드가 모두 둘 다 빗나가는 것으로 끝날 확률은 $\big((1-p)(1-r)\big)^n$이고, $p > 0$이므로 이 값은 0으로 수렴(tends to)한다. 같은 이야기로, 등비급수(geometric series) $\sum_{k\geq 0} p\big((1-p)(1-r)\big)^k$를 더해도 같은 답을 얻는다.

삼자 결투에서 A, B, C가 맞힐 확률은 각각 $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 1이다. A가 먼저 던지는 A와 B의 두 사람 결투가 두 번 나오므로, 위의 결과에 $p = \frac{2}{5}$, $r = \frac{3}{5}$를 대입하여 미리 계산해 두자.

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{6}{25}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{19}{25}} = \frac{10}{19}.$$

소문항 (i)

앨저넌이 커스버트(Cuthbert)를 맞히면 앨저넌과 버티(Bertie)만 남고, 다음에는 버티가 앨저넌을 겨누어 던진다. 앨저넌은 버티가 빗나갈 때(확률 $\frac{2}{5}$)에만 살아남는다. 그 뒤에는 A가 먼저 던지는 A와 B의 결투가 되고, 앨저넌은 확률 $\frac{10}{19}$로 이긴다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{10}{19} = \frac{4}{19}.$$

소문항 (ii)

앨저넌이 버티를 맞히면, 다음에는 커스버트가 겨눌 대상으로 앨저넌만 남은 채 던진다. 커스버트는 절대 빗나가지 않으므로 앨저넌이 이길 확률은 0이다.

소문항 (iii)

앨저넌이 빗나가면 세 사람이 모두 남아 있다. 다음에는 버티가 던지는데, 커스버트를 겨눈다.

- 확률 $\frac{3}{5}$로 버티가 커스버트를 맞힌다. 앨저넌과 버티가 남고 앨저넌이 던질 차례이므로, 앨저넌은 확률 $\frac{10}{19}$로 이긴다.
- 확률 $\frac{2}{5}$로 버티가 빗나간다. 그러면 커스버트가 버티를 겨누고 반드시 맞힌다. 앨저넌과 커스버트가 남고 앨저넌이 던질 차례이다. 앨저넌은 이번 던지기에서 반드시 맞혀야 한

다. 그렇지 않으면 커스버트가 앨저넌을 맞히기 때문이다. 따라서 앨저넌은 확률 $\frac{2}{5}$로 이긴다.

그러므로

$$\mathrm{P}(\text{A가 이김}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{19} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{6}{19} + \frac{4}{25} = \frac{150+76}{475} = \frac{226}{475}.$$

빗나간 것이 일부러였든 겨냥에 실패해서였든 이 값은 같다. 그 뒤에 버티와 커스버트가 똑같이 행동하기 때문이다.

앨저넌의 최선의 전략

생각해 보기 앨저넌은 누군가를 **맞히는** 것을 선택할 수 없고, 누군가를 **겨누는** 것만 선택할 수 있다. 각 선택은 실제로 앨저넌에게 무엇을 주는가?

누군가를 겨누면 확률 $\frac{2}{5}$로 맞히고 확률 $\frac{3}{5}$로 빗나가며, 빗나가면 소문항 (iii)의 상황이 된다. 따라서

$$\begin{aligned}
\text{커스버트를 겨눔:}\quad & \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{19} + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{200+678}{2375} = \frac{878}{2375} \approx 0.370,\\
\text{버티를 겨눔:}\quad & \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5}\cdot\frac{226}{475} = \frac{678}{2375} \approx 0.285,\\
\text{일부러 빗나감:}\quad & \frac{226}{475} = \frac{1130}{2375} \approx 0.476.
\end{aligned}$$

커스버트를 확실히 맞힌다 해도 확률은 $\frac{4}{19} = \frac{100}{475}$에 불과하고, 이는 $\frac{226}{475}$보다 작다. 어느 상대를 맞히든 앨저넌의 승률은 낮아질 뿐이다. 따라서 앨저넌은 **첫 발을 일부러 빗나가게 쏘아야 한다**. 그러면 버티와 커스버트가 서로를 쏘고, 앨저넌은 살아남은 사람을 상대로 먼저 던지게 된다. 이 전략을 쓰면 앨저넌이 이길 확률은 $\frac{226}{475}$이고, 이것이 구하려는 값이다.

검산

- $r = 0$이면 결투 공식은 1을 주고, $p = 1$이어도 1을 준다. 둘 다 마땅히 그래야 한다.
- 세 선택의 순위는 $0.476 > 0.370 > 0.285$이다. 삼자 결투 전체를 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo simulation)으로 돌려 본 결과(전략마다 3×10^5번의 게임) 0.476, 0.369, 0.284를 얻었고, 이는 정확한 값과 일치한다.
- 소문항 (iii)의 타당성 점검: $\frac{6}{19} \approx 0.316$과 $\frac{4}{25} = 0.16$을 더하면 0.476이다.

흔한 실수

- 첫 발 이후 던지는 순서를 잘못 잡는 것. 소문항 (i)에서는 버티가 **다음에** 던지므로, 결투 공식은 버티가 빗나간 뒤에만 적용된다.
- "커스버트를 겨눔"을 "커스버트를 맞힘"과 같은 뜻으로 다루는 것. 소문항 (i)–(iii)은 결과에 대한 조건부 확률이므로, 전략을 세울 때는 이들에 $\frac{2}{5}$와 $\frac{3}{5}$의 가중치를 주어야 한다.

STEP 너머

한 단계 뒤의 상황을 이용해 확률을 자기 자신으로 나타내는 방법을 **첫 단계 분석**(first-step analysis)이라 한다. 이는 마르코프 연쇄(Markov chain)의 기본 도구로, 도달 확률과 기대 도달 시간을 연립일차방정식의 해로 구해 준다. "삼자 결투(truel)"는 게임 이론(game theory)에서 잘 알려진 퍼즐이며, 가장 약한 사람이 싸움에서 비켜서 있을 때 가장 유리한 경우가 많다. 더 알고 싶다면 Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*(확률론 입문), 또는 Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*(확률 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.