풀이

STEP II 1995, 문제 11

역학 • 속도에 비례하는 공기 저항

STEP II 1995, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

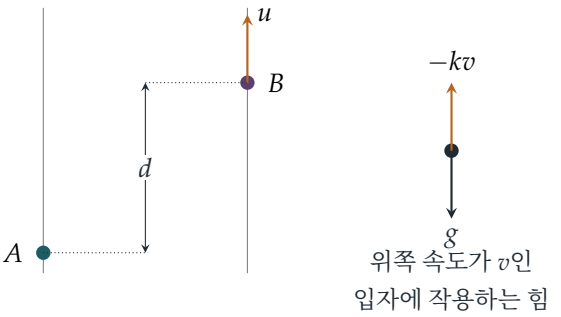
step.maths.org/questions/95-s2-q11

핵심 아이디어

저항이 속도에 대해 **선형**(*linear*)이므로 운동 방정식(equation of motion)도 선형이며, 입자가 올라가든 내려가든 같은 방정식이 성립한다. 따라서 두 운동 방정식을 빼 보자. 그러면 중력 항이 소거되고 **상대** 속도(relative velocity)는 단순히 지수적으로 감소한다. 이것을 한 번 적분하면 각 입자가 어디에 있는지 전혀 알 필요 없이 두 입자 사이의 거리를 바로 얻는다.

풀이

각 물체를 연직선 위를 움직이는 단위 질량의 입자로 모형화한다. 이 입자에는 무게 g와 운동 방향의 반대쪽으로 크기 $k|v|$인 저항이 작용한다. 위쪽을 양의 방향으로 잡고 원점을 A에 두며, 시각 t에서 입자 1(A에서 출발)과 입자 2(B에서 출발)의 높이를 각각 x_1, x_2, 속도를 각각 v_1, v_2라 하자.



운동 방정식

위쪽 속도가 v인 입자에 작용하는 저항은 $-kv$이다. $v > 0$(올라가는 중)이면 저항은 아래를 향하고, $v < 0$(내려가는 중)이면 위를 향하므로, 두 경우 모두 정확히 "운동 방향의 반대쪽"이다. 따라서 단위 질량에 대한 뉴턴(Newton)의 제2법칙에서 각 입자에 대하여

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = -g - kv_1, \qquad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = -g - kv_2,$$

가 모든 $t \geq 0$에서 성립한다.

> **생각해 보기** 입자 2는 올라갔다가 멈춘 뒤 내려온다. 각 단계마다 따로 방정식을 세워야 하지 않을까?

저항이 **속력의 제곱**에 비례한다면 그래야 한다. 이때 힘은 $-kv|v|$가 되어 v의 부호가 바뀔 때 식의 꼴이 달라진다. 그러나 여기서 힘은 $-kv$라는 하나의 식이고, 이 식은 v의 방향이 바뀌면 이미 저절로 방향이 바뀌므로, 방정식 하나로 전체 운동을 다룰 수 있다.

상대 운동

입자 1에 대한 입자 2의 상대 속도를 $w = v_2 - v_1$이라 하자. 두 방정식을 빼면 무게 항이 소거되어

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -kw, \qquad w(0) = u - 0 = u,$$

이므로 $w = u\,\mathrm{e}^{-kt}$이다. 이제 $s = x_2 - x_1$이라 하면, B가 A보다 d만큼 높이 있으므로 $s(0) = d$이다. 그러면 $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = w$이고

$$s = d + \int_0^t u\,\mathrm{e}^{-k\tau}\,\mathrm{d}\tau = d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

이다. $u \geq 0$이고 $1 - \mathrm{e}^{-kt} \geq 0$이므로 $s \geq d > 0$이다. 즉 입자 2는 항상 입자 1보다 위에 있고, 두 입자는 결코 만나지 않는다. 따라서 시각 t에서 두 입자 사이의 거리는

$$\boxed{d + \frac{u}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)}$$

이다. $k > 0$이므로 $t \to \infty$일 때 $\mathrm{e}^{-kt} \to 0$이고, 따라서 거리는 요구한 대로 $d + \dfrac{u}{k}$에 수렴(converge)한다.

각 입자의 운동 (먼 길로 돌아가고 싶다면)

각 방정식을 따로 풀면(1계 선형 미분방정식이자 변수분리형(separable)이다) $v = -\frac{g}{k} + \left(v(0) + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-kt}$를 얻고, 한 번 더 적분하면

$$x_1 = -\frac{gt}{k} + \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$
$$x_2 = d - \frac{gt}{k} + \frac{1}{k}\left(u + \frac{g}{k}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

이다. 두 식을 빼면 gt/k 항과 g/k^2 항이 소거되어 같은 s를 다시 얻는다. 두 입자 모두 종단 속도(terminal velocity) $-g/k$에 가까워지며, 이 때문에 두 입자 사이의 거리가 일정한 값으로 안정된다.

검산

- $t = 0$에서 거리는 d이다. 또 t가 작을 때 거리는 약 $d + ut$인데, 이는 저항이 없을 때와 같다(이 경우 두 입자는 중력에 의해 똑같이 떨어진다).
- $u = 0$이면 두 입자는 정지 상태에서 함께 놓여 똑같은 운동을 하므로, 공식이 말하는 대로 계속 d만큼 떨어져 있다.
- 단위: k의 단위는 s^{-1}(단위 속도당, 단위 질량당 힘)이므로 u/k는 길이이다.
- 수치적으로, 임의의 k, u, d, t에 대해 두 운동 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 계산하면 공식과 약 10^{-12} 이내로 일치한다. $k = 0.5$, $u = 10$, $d = 3$일 때 거리는 $t = 1$에서 10.87, $t = 20$에서 22.999로, $d + u/k = 23$에 가까워진다.

흔한 실수

- 입자 2의 운동을 "올라가는" 단계와 "내려가는" 단계로 나누고 저항의 부호를 각각 다르게 잡는 것: 여기서는 불필요하며, 부호 오류가 자주 생기는 원인이다.
- v가 이미 (음수인) 위쪽 속도인데도 떨어지는 입자의 저항을 $+kv$로 쓰는 것: 이렇게 하면 부호를 두 번 반영하게 된다.

STEP 너머

방정식을 빼는 요령이 통하는 이유는 운동 방정식이 선형이기 때문이다. 즉 두 해의 차는 동차 방정식(homogeneous equation) $\dot{w} = -kw$의 해가 된다. 이것이 바로 선형 미분방정식(linear differential equation) 이론 전체를 떠받치는 중첩 원리(superposition principle)이며, 이 이론에서 모든 해는 "특수해 더하기 여함수(complementary function)"의 꼴이다. 저항이 속력의 제곱에 비례하면 이 원리가 성립하지 않으며, 두 입자 사이의 거리도 전혀 다르게 움직인다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 선형 이론을 전개하고, Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 두 종류의 저항이 있는 운동을 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.