풀이

STEP II 1995, 문제 10

역학 • 충돌과 반발계수

STEP II 1995, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q10

핵심 아이디어

각 충돌은 두 개의 방정식, 즉 운동량 보존(conservation of momentum)과 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)으로 이루어진 문제이다. 두 충돌을 차례로 다루고, 두 번째 구의 최종 속도를 u와 같다고 놓은 뒤 m_1에 대해 풀면 된다. 그러면 질량은 양수여야 한다는 단순한 사실로부터 부등식이 나온다. 마지막 부분에서는 충돌이 오직 **상대** 속도에만 관련된다는 점에 주목하자. 속력 v로 움직이는 좌표계에서 운동을 바라보면 이 문제는 첫 부분의 문제로 바뀐다.

풀이

구들을 매끄러운 탁자 위에서 한 직선을 따라 움직이는 입자로 모형화한다. 따라서 수평 방향으로 작용하는 힘은 구 사이의 충격량(impulse)뿐이다. 첫 번째 구가 움직이는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



첫 번째 충돌

첫 번째 충돌 직후 첫 번째 구와 두 번째 구의 속도를 각각 v_1, w라 하자. 운동량 보존과 뉴턴의 법칙(멀어지는 속력은 다가오는 속력의 e배이다)으로부터

$$m_1 v_1 + m_2 w = m_1 u, \qquad w - v_1 = eu.$$

를 얻는다. $v_1 = w - eu$를 첫 번째 식에 대입하면 $(m_1 + m_2)w = m_1(1 + e)u$이므로

$$w = \frac{m_1(1+e)u}{m_1+m_2}, \qquad v_1 = \frac{(m_1 - em_2)u}{m_1+m_2}.$$

이다.

두 번째 충돌

이제 속도 w로 움직이는 두 번째 구가 정지해 있는 세 번째 구와 충돌한다. 이는 m_1, m_2, u를 m_2, m_3, w로 바꾼 같은 상황이므로, 충돌 후 두 번째 구의 속도는

$$\frac{(m_2 - em_3)w}{m_2+m_3}.$$

이다. 문제에서 이 값이 u와 같다고 했다. w를 대입하고 $u \neq 0$으로 약분하면

$$\frac{(m_2 - em_3)\, m_1(1+e)}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} = 1, \qquad \text{따라서} \qquad m_1(1+e)(m_2 - em_3) = (m_1+m_2)(m_2+m_3).$$

이다. m_1이 들어 있는 항을 모으면

$$m_1[(1+e)m_2 - e(1+e)m_3 - m_2 - m_3] = m_2(m_2+m_3),$$

이고, 괄호 안을 정리하면 $em_2 - m_3(1 + e + e^2)$이 된다. 따라서

$$\boxed{m_1 = \frac{m_2(m_2+m_3)}{em_2 - m_3(1+e+e^2)}}.$$

이다.

? 생각해 보기 가진 것이 방정식뿐인데, 부등식은 어디에서 나오는가?

물리적 사실, 즉 질량은 양수라는 사실에서 나온다. 분자 $m_2(m_2 + m_3)$은 양수이고, 우리가 나눈 괄호는 0일 수 없다(그렇다면 바로 앞의 식이 $0 = m_2(m_2 + m_3)$이 되기 때문이다). 따라서 $m_1 > 0$이려면 분모가 양수여야 한다.

$$em_2 - m_3(1+e+e^2) > 0, \qquad \text{즉,} \qquad m_2 e > m_3(1+e+e^2),$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

마지막 부분에서 충돌 횟수를 세므로, 그 뒤에 다른 일이 일어나지 않음을 확인해 둘 필요가 있다. 두 번째 충돌 후 두 번째 구는 u로 움직이고, 첫 번째 구는 $v_1 = u - \frac{m_2(1+e)u}{m_1+m_2} < u$로 움직이므로 첫 번째 구는 다시는 두 번째 구를 따라잡지 못한다. 세 번째 구는 상대 속력 $ew > 0$으로 두 번째 구에서 멀어진다. 따라서 충돌은 정확히 두 번 일어난다.

마지막 부분

이제 첫 번째 구를 제외한 세 구가 모두 공통의 속도 v로 움직이고, 첫 번째 구는 $u > v$로 움직인다. 직선을 따라 일정한 속도 v로 움직이는 좌표계(frame)에서 운동을 바라보자. 이 좌표계에서는 다음이 성립한다.

- 첫 번째 구는 $u - v > 0$의 속도로 두 번째 구를 향해 움직이고, 두 번째 구와 세 번째 구는 정지해 있다.
- 각 충돌에서 운동량은 여전히 보존된다. 모든 속도에서 v를 빼면 운동량 방정식의 양변이 같은 양 $(m_a + m_b)v$만큼 바뀌기 때문이다.
- 뉴턴의 법칙은 속도의 차만 포함하므로 변하지 않는다.

따라서 움직이는 좌표계에서는 u를 $u - v$로 바꾼 것을 제외하면 첫 부분과 정확히 같은 상황이며, 질량들도 같은 관계식(u를 전혀 포함하지 않는다)을 만족한다. 첫 부분에 의해 두 번의 충돌 후 두 번째 구는 이 좌표계에 대하여 $u - v$로 움직인다. 탁자의 좌표계로 돌아가 v를 다시 더하면, 두 번의 충돌 후 두 번째 구의 속도는

$$\boxed{u}.$$

이다. 조건 $u > v$는 첫 번째 충돌이 애초에 일어나도록 보장하는 조건이며, 가정 $v > 0$은 실제로 논증에 필요하지 않다.

검산

$e = \frac{1}{2}$, $m_3 = 1$, $m_2 = 4$로 잡자. 그러면 $em_2 = 2 > \frac{7}{4} = m_3(1 + e + e^2)$이고, 공식에 의해 $m_1 = \frac{4 \cdot 5}{1/4} = 80$이다. $u = 7$이면 첫 번째 충돌에서 두 번째 구의 속도는 $w = \frac{80 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7}{84} = 10$이 되고, 두 번째 충돌 후에는 $\frac{(4 - \frac{1}{2}) \cdot 10}{5} = 7 = u$가 되어 예상대로이다. 또한 컴퓨터로 질량과 e를 조건에 맞게 무작위로 10^4번 넘게 골라 충돌을 (분수로) 정확히 계산해 보았는데, 모든 경우에 충돌이 정확히 두 번 일어나고, 두 번째 구의 최종 속도가 u이며, 두 번째 구와 세 번째 구에 공통의 속도 $v < u$를 더해도 같은 최종 속도 u가 나옴을 확인하였다.

흔한 실수

- 뉴턴의 법칙을 거꾸로 쓰는 실수, 예를 들어 $v_1 - w = eu$라고 쓰는 것이다. 앞에 있는 구는 뒤에 있는 구보다 적어도 같은 빠르기로 움직여야 한다.
- 마지막 부분에서 문제가 명시적으로 유도하는 좌표계 변환을 쓰지 않고 충돌을 처음부터 다시 계산하는 것.
- 마지막에 v를 다시 더하는 것을 잊고 $u - v$를 답으로 쓰는 것.

STEP 너머

마지막 부분은 갈릴레이 불변성(Galilean invariance)의 한 예이다. 충돌 법칙은 일정한 속도로 움직이는 모든 좌표계에서 같은 모양이므로, 문제를 가장 쉽게 만드는 좌표계를 고를 수 있다. 대학 역학에서 가장 즐겨 쓰는 선택은 질량중심 좌표계(centre-of-mass frame)로, 이 좌표계에서는 전체 운동량이 0이고 충돌은 단순히 속도의 방향을 뒤집고 크기를 e배로 만든다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충돌을 다루면서 이 아이디어를 폭넓게 사용한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.