풀이

STEP II 1995, 문제 1

순수수학 • 등비급수의 미분

STEP II 1995, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s2-q1

핵심 아이디어

유한 등비급수(geometric series)는 닫힌 형태(closed form)로 나타낼 수 있고, x에 대한 두 함수 사이의 항등식(identity)은 미분(differentiation)하여 새로운 항등식을 얻을 수 있다. $\sum x^k$를 미분하면 인수 k가 앞으로 내려오는데, 이것이 바로 등비급수를 $\sum kx^{k-1}$로 바꾸어 준다. 그다음 $x = -1$을 대입하면 부호가 번갈아 나타난다. 제곱의 경우에는 답의 꼴로부터 A와 B가 무엇이어야 하는지 알아낸 다음, 수학적 귀납법(induction)으로 증명하는 것이 가장 깔끔한 방법이다.

풀이

소문항 (i)

$S = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$이라 하자. 그러면

$$S(1-x) = (1 + x + \cdots + x^n) - (x + x^2 + \cdots + x^{n+1}) = 1 - x^{n+1},$$

이다. 거듭제곱 $x, x^2, \ldots, x^n$이 각각 양의 부호와 음의 부호로 한 번씩 나타나 소거되기 때문이다. $x \neq 1$이면 $1 - x \neq 0$이므로 양변을 이것으로 나눌 수 있다.

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

따라서 증명되었다.

소문항 (ii)

(i)의 양변은 $x \neq 1$에서 미분가능한 x의 함수이고 그 범위에서 서로 같으므로, 도함수(derivative)도 서로 같다. 좌변에서는

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x+\cdots+x^n) = 1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}.$$

우변에서는 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2} = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

이제 $x=-1$을 대입한다. $-1 \neq 1$이므로 이는 허용된다. 항 kx^{k-1}이 $(-1)^{k-1}k$가 되므로 좌변은 $1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$이 된다. $(-1)^{n+1} = -(-1)^n$을 이용하면 우변은

$$\frac{1-(n+1)(-1)^n+n(-1)^{n+1}}{4} = \frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4},$$

이 된다.

- n이 짝수이면 $(-1)^n = 1$이고, 값은 $\dfrac{1-2n-1}{4} = -\dfrac{n}{2}$이다.
- n이 홀수이면 $(-1)^n = -1$이고, 값은 $\dfrac{1+2n+1}{4} = \dfrac{n+1}{2}$이다.

이것이 보여야 할 결과이다.

소문항 (iii)

$T_n = 1^2-2^2+3^2-\cdots+(-1)^{n-1}n^2$이라 하고, $f(n) = An^2+Bn$에 대하여 $T_n = (-1)^{n-1}f(n)$이라고 가정하자.

? **생각해 보기** 공식이 참인지 알기 전에 어떻게 A와 B를 구할 수 있을까?

T_n에 대해 확실히 알고 있는 한 가지 사실을 이용한다. 연속한 두 합의 차는 마지막 항, 즉 $T_n - T_{n-1} = (-1)^{n-1}n^2$이다. $T_{n-1} = (-1)^{n-2}f(n-1) = -(-1)^{n-1}f(n-1)$이므로 이 식은

$$(-1)^{n-1}\big(f(n)+f(n-1)\big) = (-1)^{n-1}n^2, \qquad \text{따라서} \qquad f(n)+f(n-1) = n^2.$$

이 된다. $f(n) = An^2+Bn$이면

$$\begin{aligned} f(n)+f(n-1) &= An^2+Bn+A(n-1)^2+B(n-1) \\ &= 2An^2+(2B-2A)n+(A-B). \end{aligned}$$

이것이 모든 n에 대하여 n^2과 같으려면 $2A=1$이고 $B=A$이어야 한다. 즉

$$A = B = \tfrac{1}{2}, \qquad T_n = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

(이 값들은 반드시 이렇게 정해진다. $n=1$이면 $A+B=1$이고 $n=2$이면 $-(4A+2B)=-3$인데, 이 연립방정식의 유일한 해는 $A=B=\frac{1}{2}$이다.)

수학적 귀납법에 의한 증명. $n=1$일 때 $T_1=1=(-1)^0\cdot\frac{1\cdot 2}{2}$이다. 어떤 $n\geq 2$에 대하여 $T_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{(n-1)n}{2}$이라고 가정하자. 그러면

$$\begin{aligned} T_n = T_{n-1}+(-1)^{n-1}n^2 &= (-1)^{n-1}\left(n^2-\frac{n(n-1)}{2}\right) \\ &= (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

이고, 이는 n에 대한 공식이다. 따라서 $A=B=\frac{1}{2}$일 때 공식은 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

다른 방법으로, 항을 두 개씩 묶을 수 있다. $(2m-1)^2-(2m)^2=-(4m-1)$이다. $n=2m$이면 $T_n=-\sum_{j=1}^{m}(4j-1)=-m(2m+1)=-\frac{n(n+1)}{2}$이고, $n=2m+1$이면 여기에 $(2m+1)^2$을 더하여 $(2m+1)(m+1)=\frac{n(n+1)}{2}$를 얻는다. ((ii)의 항등식에 x를 곱한 다음 한 번 더 미분할 수도 있지만, 계산이 훨씬 복잡해진다.)

검산

$n=4$일 때: $1-2+3-4=-2=-\frac{4}{2}$이고, $1-4+9-16=-10=-\frac{4\cdot 5}{2}$이다. $n=5$일 때: $1-2+3-4+5=3=\frac{6}{2}$이고, $-10+25=15=\frac{5\cdot 6}{2}$이다. 세 항등식을 모두 n이 500까지일 때 컴퓨터로 확인해 보면(예를 들어 $T_{10}=-55$, $T_{11}=66$) 정확히 일치한다.

또한 $|T_n|=1+2+\cdots+n$임에 주목하자. 제곱의 교대합(alternating sum)은 처음 n개의 정수의 단순한 합과 크기가 같은데, 이 놀라운 우연은 항을 묶는 논증으로 설명된다.

흔한 실수

- (i)의 항등식이 모든 $x\neq 1$에 대하여 성립하기 때문에 비로소 $x=-1$을 대입할 수 있다는 점을 잊는 것. $x=1$에서는 우변이 정의되지 않는다.
- $(-1)^{n+1}$의 부호 실수. 이것은 $(-1)^n$이 아니라 $-(-1)^n$과 같다.
- $n=1$과 $n=2$로부터 A와 B를 구하고 거기서 멈추는 것. 이것은 이 값들이 **가능한 유일한** 값이라는 것만 보여 준다. 공식이 실제로 모든 n에 대하여 성립함을 보이는 것은 귀납법(또는 항 묶기)이다.

STEP 너머

$\sum x^k$를 항별로 미분하는 것은 강력한 아이디어의 유한한 형태이다. 멱급수(power series)는 수렴 반지름(radius of convergence) 안에서 항별로 미분할 수 있으며, $|x| < 1$에 대하여 $\sum kx^{k-1} = (1-x)^{-2}$를 얻는다. $x = -1$에서 무한급수 $1-2+3-4+\cdots$는 발산(diverge)하지만, 공식은 $\frac{1}{4}$라는 값을 암시한다. 실제로 (ii)의 공식은 $\frac{1}{4} - (-1)^n \frac{2n+1}{4}$로 쓸 수 있으므로, 부분합(partial sum)은 $\frac{1}{4}$를 중심으로 대칭적으로 진동한다. 이러한 발산급수에 값을 부여하는 것이 아벨(Abel) 합(Abel summation)의 기본 아이디어이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해하기)는 멱급수의 항별 미분을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.