풀이

STEP I 1995, 문제 9

역학 • 포물체 궤적의 포락선

> **STEP I 1995, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q9

핵심 아이디어

점 (x, y)를 하나 고정하고 이렇게 묻는다: 그 점을 지나는 궤적을 갖는 발사 각도가 존재하는가? 궤적의 방정식을 θ 대신 $\tan\theta$로 쓰면 $\tan\theta$에 대한 **이차방정식**(*quadratic*)이 된다. 어떤 점에 도달할 수 있는 것은 정확히 이 이차방정식이 실근을 가질 때이므로, 문제 전체가 판별식(discriminant) 하나로 귀결된다.

풀이

모형

입자를 중력만 받아 움직이는 질점(point mass)으로 본다. 즉 공기 저항이 없고, g는 크기와 방향이 일정하며, 경로를 가로막는 것도 없다고 가정한다. 그러면 입자는 처음 속도를 포함하는 연직 평면 안에서 움직이고, O로부터의 수평 **거리**만이 중요하므로 대칭성에 의해 $x \geq 0$으로 두어도 된다. 이때 입자는 x가 증가하는 방향으로 수평면 위로 각 θ만큼, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$로 발사된다. (바로 위로 쏘는 경우 $\theta = \frac{\pi}{2}$는 마지막에 다룬다.)

궤적

$u = \sqrt{2gh}$로 두면 $u^2 = 2gh$이다. 아래쪽으로 일정한 가속도 g가 작용하므로 시간 t가 지난 뒤

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

이다. $t = x/(u\cos\theta)$를 소거하고 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 이용하면

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \tan^2\theta\right) = x\tan\theta - \frac{x^2}{4h}\left(1 + \tan^2\theta\right),$$

를 얻는다. 여기서 $2u^2 = 4gh$를 썼다. $T = \tan\theta$로 쓰고 양변에 $4h$를 곱하면, 궤적이 (x, y)를 지날 필요충분조건은

$$x^2T^2 - 4hx\,T + (x^2 + 4hy) = 0. \qquad (*)$$

이다. θ가 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 전체를 움직이면 $T = \tan\theta$는 모든 실숫값을 정확히 한 번씩 취하므로, 각도를 고르는 것은 실수 T를 고르는 것과 같다.

생각해 보기 왜 궤적을 θ 대신 $\tan\theta$로 나타내는가?

θ로 쓰면 방정식에 sin, cos, $\sec^2$이 뒤섞여 다루기 불편하다. $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$를 쓰면 모든 것이 한 변수 T의 다항식이 되고, "그런 각도가 있는가?"라는 질문은 "이 이차방정식이 실근을 갖는가?"라는, 곧바로 답할 수 있는 질문으로 바뀐다.

도달할 수 있는 점

$x > 0$이라 하자. 그러면 $(*)$는 T에 대한 진짜 이차방정식이고, 실근을 가질 필요충분조건은 판별식이 음이 아닌 것이다:

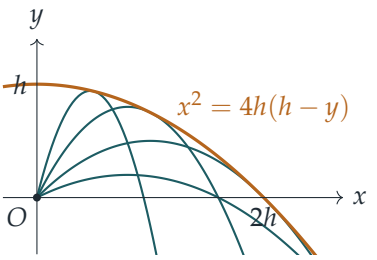
$$\begin{aligned}(4hx)^2 - 4x^2(x^2 + 4hy) \geq 0 &\iff 4x^2(4h^2 - x^2 - 4hy) \geq 0 \\ &\iff x^2 \leq 4h^2 - 4hy = 4h(h - y),\end{aligned}$$

여기서 $4x^2 > 0$으로 나누었다. 따라서 (x, y)가 포물선 **위쪽**에 있으면, 즉 $x^2 > 4h(h - y)$, 다시 말해 $y > h - \dfrac{x^2}{4h}$이면, $(*)$는 실근을 갖지 않으며 어떤 발사 각도로도 입자를 (x, y)에 보낼 수 없다.

남은 것은 O를 지나는 연직선 $x = 0$의 경우이다. 이 직선 위에서 $y \neq 0$인 점에는 연직으로 발사해야만 도달할 수 있다(다른 각도에서는 모든 $t > 0$에 대해 $x > 0$이다). 속력 u로 바로 위로 쏘면 입자는 높이 $u^2/(2g) = h$까지 올라가고 그 이상은 오르지 못하는데, 이 점이 바로 포물선이 $x = 0$과 만나는 점이다. 따라서 이 직선 위에서도 포물선 위쪽의 점에는 도달하지 못한다.

그러므로 발사 각도가 무엇이든 입자는 포물선 $x^2 = 4h(h - y)$ 위쪽의 점에는 결코 도달할 수 없다. ■

이 한계는 최선이다. $x^2 = 4h(h - y)$이면 판별식이 0이 되어 경로가 포물선에 꼭 접하는 각도 $\tan\theta = 2h/x$가 정확히 하나 존재한다. 이 포물선은 모든 궤적의 **포락선**(*envelope*)이며, 흔히 안전 포물선(parabola of safety)이라고 부른다.



속력 $\sqrt{2gh}$인 네 궤적(청록색)이 각각 경계 포물선(호박색)에 한 번씩 접한다.

단순화 가정

- 입자는 질점이다(크기도 회전도 없다).
- 공기 저항(및 중력 이외의 모든 힘)은 무시한다.
- 중력장은 균일하다. 즉 운동 영역 전체에서 g가 일정하며, 이는 지표면을 평평하게 보고 지구의 자전을 무시한다는 뜻이기도 하다.
- 경로가 예컨대 지면 등에 가로막히지 않아서, 입자가 실제로 해당 점들까지 날아갈 수 있다.

검산

- $x = 0$에서 포물선은 $y = h = u^2/(2g)$를 주는데, 이는 연직으로 던졌을 때의 최고 높이이다. $y = 0$에서는 $x = 2h = u^2/g$를 주는데, 이는 평지에서의 익숙한 최대 도달 거리이다(예측대로 $\tan\theta = 2h/x = 1$인 45°에서).
- 수치적으로, $g = 9.8$, $h = 1.7$로 두고 거의 바로 아래쪽에서 거의 바로 위쪽까지 399개의 발사 각도에 대해 운동을 단계별로 계산하였다. 어느 경로의 어느 지점에서든 포물선 위로 올라간 최대 높이는 약 -5×10^{-13}, 즉 반올림 오차 범위에서 0이었고, 고정된 x에서 각도에 대해 y를 최대화하면 매번 $h - x^2/(4h)$가 재현되었다.

흔한 실수

- θ를 범위 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서만 다루는 것. O보다 아래에 있는 점에는 아래쪽으로 발사해야 하며($T < 0$), 논증은 이런 경우도 포괄해야 한다.
- $x = 0$을 따로 다루지 않고 x(또는 x^2)로 나누는 것.
- 특정한 궤적 하나가 포물선 아래에 있음만 보이는 것. 주장은 **모든** 각도에 대한 것이며, 그래서 점을 고정하고 각도를 변화시키는 것이다.

STEP 너머

여기서의 포물선은 매개변수 하나로 이루어진 궤적족의 **포락선**, 즉 족의 모든 곡선에 접하는 곡선이다. 곡선족 $F(x, y, T) = 0$의 포락선은 $F = 0$과 $\partial F/\partial T = 0$에서 T를 소거하여 구하는데, T에 대한 이차식의 경우 이는 정확히 판별식이 0이 되는 조건이다. 포락선은 광학의 초곡선(caustic), 일계 미분방정식(differential equation) 이론의 특이해(singular solution), 그리고 주어진 속력을 가진 모든 포사체의 "안전 영역"에서 다시 등장한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 공기 저항이 있을 때와 없을 때의 포물선 운동을 공부하기 위한 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.