풀이

STEP I 1995, 문제 8

순수수학 • 선형 미분방정식

> **STEP I 1995, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q8

핵심 아이디어

미지의 대상은 세 함수이지만, 각각의 고정된 x에서는 세 개의 수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$일 뿐이다. 주어진 세 해를 $(*)$에 대입하면 이 세 수에 대한 세 개의 일차방정식을 얻고, 이를 연립방정식(simultaneous equations)으로 푼다. 둘째 문단에서는 $(*)$의 좌변이 y에 대하여 선형(*linear*)이므로, x, 1, x^{-1}의 일차결합에 대한 결과는 각 항이 따로 만들어 내는 결과로부터 바로 얻어진다.

풀이

f, g, h 구하기

좌변 $y'' + f(x)y' + g(x)y$를 Ly로 쓰자. 그러면 $(*)$는 $Ly = h(x)$를 뜻한다. 각 해를 차례로 대입한다.

- $y = 1$: 이때 $y' = y'' = 0$이므로 $g(x) = h(x)$이다.
- $y = x$: 이때 $y' = 1$, $y'' = 0$이므로 $f(x) + x\,g(x) = h(x)$이다.
- $y = x^{-1}$: 이때 $y' = -x^{-2}$, $y'' = 2x^{-3}$이므로

$$\frac{2}{x^3} - \frac{f(x)}{x^2} + \frac{g(x)}{x} = h(x).$$

둘째 식에 $h = g$를 쓰면 $f(x) = (1-x)\,g(x)$를 얻는다. 이 두 관계를 셋째 식에 대입하고 양변에 x^3을 곱하면($x > 0$이므로 가능하다) 다음과 같다.

$$\begin{aligned} 2 - x(1-x)\,g(x) + x^2\,g(x) &= x^3\,g(x) \\ 2 &= g(x)\left(x^3 - 2x^2 + x\right) = g(x)\,x(1-x)^2. \end{aligned}$$

$0 < x < 1$이므로 인수 $x(1-x)^2$은 0이 아니고, 따라서 이것으로 나눌 수 있다. 그러므로

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{h}(x) = \frac{2}{x(1-x)^2}, \qquad \mathrm{f}(x) = (1-x)\,\mathrm{g}(x) = \frac{2}{x(1-x)}.$$

각 x에서 세 방정식을 자유롭게 고를 여지 없이 한 단계씩 풀었으므로, 조건을 만족하는 함수는 이것뿐이다. 조건 $0 < x < 1$은 이 함수들이 발산하는 $x = 0$과 $x = 1$을 피하게 해 준다.

따라서 구하는 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{2}{x(1-x)}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x(1-x)^2}y = \frac{2}{x(1-x)^2}.$$

$ax + b + c/x$는 언제 해가 되는가?

연산자(operator) L은 선형이다. 즉 상수 α, β에 대하여 $L(\alpha u + \beta v) = \alpha\,Lu + \beta\,Lv$이다. 미분이 선형이고, f, g는 단지 y'과 y에 곱해질 뿐이기 때문이다. 첫째 문단에서

$$L(x) = L(1) = L(x^{-1}) = \mathrm{h}(x).$$

그러므로 $y = ax + b + c/x$에 대하여

$$Ly = a\,L(x) + b\,L(1) + c\,L(x^{-1}) = (a+b+c)\,\mathrm{h}(x).$$

> ? **생각해 보기** 왜 단지 "어떤 x에서 $a+b+c=1$"이 아니라 $a+b+c=1$이라고 결론지을 수 있는가?

모든 $0 < x < 1$에 대하여 $(a+b+c)\,\mathrm{h}(x) = \mathrm{h}(x)$, 즉 $(a+b+c-1)\,\mathrm{h}(x) = 0$이어야 한다. 그런데 이 구간에서 $\mathrm{h}(x) = 2/\big(x(1-x)^2\big) > 0$이므로 이것으로 나눌 수 있다. 따라서 $y = ax + b + c/x$가 $(*)$의 해일 필요충분조건은

$$a + b + c = 1.$$

검산

- $(a,b,c) = (1,0,0)$, $(0,1,0)$ 또는 $(0,0,1)$로 두면 주어진 세 해를 다시 얻고, 각각 $a+b+c=1$을 만족한다.
- 직접 확인: $x = \frac{1}{2}$일 때 $\mathrm{f} = 8$, $\mathrm{g} = \mathrm{h} = 16$이다. $y = 1/x$에 대하여 $y = 2$, $y' = -4$, $y'' = 16$이고, $16 - 32 + 32 = 16$이므로 조건을 만족한다.
- 컴퓨터로 $(0,1)$ 안의 유리수 49개 점에서 세 해를 모두 정확하게 확인하였고, 무작위로 고른 (a,b,c,x) 2000개에 대하여 $Ly = (a+b+c)\mathrm{h}$임을 확인하였다.

흔한 실수

- $y = x^{-1}$에 대하여 $y'' = -2x^{-3}$으로 쓰는 실수: 음의 부호 두 개가 곱해져 $+2x^{-3}$이 된다.
- $a + b + c = 0$이라고 답하는 실수. 이것은 $ax + b + c/x$가 **동차**(*homogeneous*) 방정식 $Ly = 0$의 해가 될 조건이다. 여기서는 우변이 0이 아니라 h이다.

STEP 너머

이것이 선형 미분방정식(linear differential equation)의 해의 구조이다. $Ly = \mathrm{h}$의 임의의 두 해의 차는 $Ly = 0$의 해가 된다. 여기서 $x - 1$과 $x^{-1} - 1$은 동차방정식의 해이고, 2계 방정식에서는 일차독립인 두 해로 모든 해를 나타낼 수 있다. 따라서 $1 + \alpha(x-1) + \beta(x^{-1} - 1)$이 일반해(general solution)이며, 이는 정확히 $a + b + c = 1$인 해들의 모임이다. 론스키안(Wronskian)을 쓰면 "일차독립"의 뜻을 엄밀하게 표현할 수 있다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 이 모든 내용을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.