풀이

STEP I 1995, 문제 7

순수수학 • 삼각형의 벡터 기하

STEP I 1995, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q7

핵심 아이디어

원점을 A, B, C로부터 같은 거리에 있는 점에 두면 위치벡터(position vector) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 길이가 모두 같아진다. 이 사실 하나가 모든 일을 해 준다. 길이가 같은 벡터에 대해서는 $(\mathbf{b}+\mathbf{c})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$이기 때문이다. Q의 위치벡터가 $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$라는 아름답고 간단한 꼴임을 알고 나면, 두 소문항 모두 한두 줄의 계산으로 끝난다.

풀이

원점 정하기

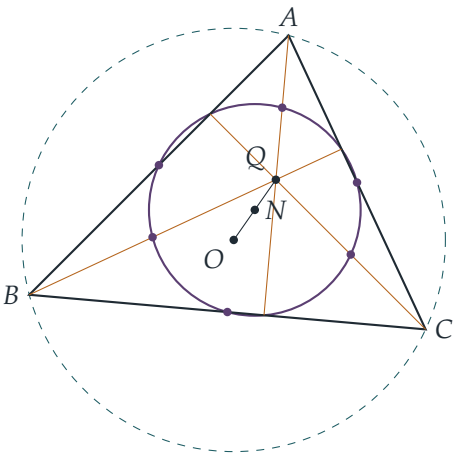
A와 B로부터 같은 거리에 있는 점들은 AB의 수직이등분선(perpendicular bisector), 즉 AB에 수직인 직선을 이룬다. B와 C에 대해서도 마찬가지이다. A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로(not collinear) AB와 BC는 평행하지 않고, 따라서 두 수직이등분선도 평행하지 않다. 그러므로 이 두 직선은 정확히 한 점에서 만나며, 이 점은 A와 B로부터, 그리고 B와 C로부터 같은 거리에 있으므로 세 점 모두로부터 같은 거리에 있다. (이 점은 삼각형의 외심(circumcentre)이다.)

이 점을 O로 잡고, A, B, C의 위치벡터를 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$라 하며, 공통의 거리를 R이라 하자. 그러면

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R.$$

무게중심(centroid)의 위치벡터는 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$이다. $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$는 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$를 뜻하므로

$$\mathbf{q} = 3\mathbf{g} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$



그림에는 O를 중심으로 하고 A, B, C를 지나는 원(점선), Q에서 만나는 세 수선(altitude), 그리고 N을 중심으로 하고 반지름이 $\frac{1}{2}R$이며 소문항 (ii)의 여섯 중점을 지나는 원이 나타나 있다.

소문항 (i)

$\overrightarrow{AQ} = \mathbf{q} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$이고 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$이므로

$$\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = R^2 - R^2 = 0,$$

이다. 여기서 교차항은 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$를 이용해 소거했다. 따라서 $\overrightarrow{AQ}$는 $\overrightarrow{BC}$에 수직이다.

? **생각해 보기** $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$이면 정말로 Q가 A에서 그은 수선 위에 있는가? $\overrightarrow{AQ}$가 영벡터라면 어떻게 되는가?

$Q \neq A$이면 직선 AQ는 A를 지나고 BC에 수직이므로 A에서 그은 수선 **그 자체**이고, Q는 그 위에 있다. $Q = A$이면($\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$일 때, 즉 BC가 지름이고 A에서의 각이 직각일 때 정확히 이런 일이 일어난다) Q가 A에서 그은 수선 위에 있는 것은 자명하다. 어느 경우든 Q는 A에서 그은 수선 위에 있다.

이 논증에서 A를 특별하게 다룬 부분은 전혀 없다. 식 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$는 대칭적이므로 같은 방법으로

$$\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{CA} = (\mathbf{c} + \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 0,$$
$$\overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{AB} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 = 0,$$

이고, Q는 B와 C에서 그은 수선 위에도 있다. 따라서 세 수선은 모두 한 점 Q를 지난다. 즉 세 수선은 한 점에서 만난다(concurrent). (Q는 수심(orthocentre)이다.)

소문항 (ii)

AQ의 중점의 위치벡터는 $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{q}) = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, N에서 이 점까지의 변위는

$$\mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

BC의 중점의 위치벡터는 $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$이므로, N에서 이 점까지의 변위는

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}.$$

두 벡터의 길이는 모두 $\frac{1}{2}|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}R$이다.

같은 대칭성에 의해 BQ와 CA의 중점은 N으로부터 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{b}$만큼, CQ와 AB의 중점은 $\pm\frac{1}{2}\mathbf{c}$만큼 떨어져 있다. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = R$이므로 여섯 중점은 모두 N으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있으며, 이것이 보여야 할 내용이었다. 사실 우리는 조금 더 많은 것을 보였다. AQ의 중점과 BC의 중점은 이 원의 한 지름의 양 끝점이고, 나머지 두 쌍도 마찬가지이다.

검산

- 정삼각형의 경우: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = \mathbf{0}$이므로 O, G, Q, N이 모두 일치하고, 여섯 중점은 모두 중심으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있어야 한다. 실제로 변의 중점들은 거리 $R\cos 60^\circ = \frac{1}{2}R$에 있고, AQ 등의 중점들은 반지름의 한가운데에 있다.
- A에서의 각이 직각인 경우: 두 직각변 자체가 A를 지나는 수선이므로, 위의 논증이 예측하는 대로 $Q = A$이다.
- 수치적으로, 무작위 삼각형 10^5개를 잡아 외심을 직접 계산하고, $Q = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$임과 세 내적(dot product)이 모두 0이 됨, 그리고 여섯 중점이 모두 N으로부터 거리 $\frac{1}{2}R$에 있음을 확인했다. 가장 큰 상대오차는 약 10^{-13}이었다.

흔한 실수

- $\overrightarrow{GQ} = 2\overrightarrow{OG}$를 $\mathbf{q} = 2\mathbf{g}$로 읽는 것. 이 식은 $\mathbf{q}-\mathbf{g} = 2\mathbf{g}$를 뜻하므로 $\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$이다.
- 수직 관계 하나만 보이고 멈추는 것. 한 점에서 만남을 보이려면 Q가 세 수선 위에 모두 있어야 한다. 같은 계산이 B와 C에 대해서도 성립한다고 명시적으로 밝혀야 한다.
- 원점의 존재를 정당화하지 않는 것. 원점이 존재하는 이유는 평행하지 않은 두 변의 수직이등분선이 반드시 만나기 때문이다.

STEP 너머

$\mathbf{q} = 3\mathbf{g}$이고 $\mathbf{n} = \frac{3}{2}\mathbf{g}$이므로 점 O, G, N, Q는 모두 한 직선, 즉 **오일러 직선**(*Euler line*) 위에 있으며 $OG : GQ = 1 : 2$이다. 오일러(Euler)의 이름이 붙은 이 직선과 함께, 소문항 (ii)의 원은 **구점원**(*nine-point circle*)이라 불린다. 이 원은 세 수선의 발(그림에서 볼 수 있다)도 지나는데, 각 수선의 발에서 AQ의 중점과 BC의 중점을 잇는 것과 같은 지름을 바라보는 각이 직각이기 때문이다. 대칭적인 식이 일을 하도록 원점을 영리하게 고르는 것은 벡터 기하와 선형대수에서 자주 등장하는 기법이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 벡터와 내적의 도구를 더 깊이 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(수학 심화 문제)에는 이런 정신의 STEP 스타일 기하 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.