풀이

STEP I 1995, 문제 6

순수수학 • 베르누이 미분방정식

STEP I 1995, 6번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q6

핵심 아이디어

두 방정식 모두 y에 대해 선형(linear)이 아니지만, 각각 $1/y$의 적당한 거듭제곱에 대해서는 선형이다. 좌변에는 y'/y^2이 들어 있는데, 이것은 (부호를 제외하면) $1/y$의 도함수(derivative)이다. 따라서 $u = 1/y$로 놓으면 방정식은 u에 대한 1계 선형 미분방정식(first-order linear equation)이 되고, 적분인자(integrating factor)를 쓰면 풀이가 끝난다. 소문항 (ii)에서는 y'/y^3 항이 있으므로 대신 $1/y^2$을 살펴보는 것이 자연스럽다.

풀이

소문항 (i)

$u = 1/y$로 놓는다. 연쇄법칙(chain rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

이므로 방정식의 첫째 항은 정확히 $-\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$이고, 둘째 항은 u이다. 방정식은

$$-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u = -\mathrm{e}^{2x}.$$

가 된다. 이것은 u에 대해 선형이다. 적분인자는 $\mathrm{e}^{\int -1\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-x}$이고, 양변에 이를 곱하면

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u\,\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \mathrm{e}^{-x}u = -\mathrm{e}^{x}.$$

를 얻는다. A를 임의의 상수로 하여 적분하면

$$u\,\mathrm{e}^{-x} = A - \mathrm{e}^{x}, \qquad \text{따라서} \qquad u = A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}.$$

이다. $y = 1/u$이므로

$$y = \frac{1}{A\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}},$$

이고, 이것이 구하는 일반해(general solution)이다. (원래 방정식에 $1/y$가 들어 있으므로 언제나 $y \neq 0$이고, 따라서 이 치환(substitution)으로 잃어버리는 해는 없다. 이 식은 $A\mathrm{e}^{x} \neq \mathrm{e}^{2x}$인 임의의 구간, 즉 $A > 0$일 때 $x = \ln A$를 피하는 구간에서 성립한다.)

소문항 (ii)

생각해 보기 여기서는 어떤 치환이 $u = 1/y$의 역할을 하는가?

새 변수의 도함수에서 y'/y^3이 나오기를 원한다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2}{y^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

이므로 알맞은 선택은 $v = 1/y^2$이다. 그러면 첫째 항은 $-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}x$이고 둘째 항은 v이므로

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = \mathrm{e}^{2x}, \qquad \text{즉,} \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - 2v = -2\mathrm{e}^{2x}.$$

이다. 이번에는 적분인자가 e^{-2x}이다.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\,\mathrm{e}^{-2x}) = -2\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{-2x} = -2.$$

B를 임의의 상수로 하여 적분하면

$$v\,\mathrm{e}^{-2x} = B - 2x, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{1}{y^2} = (B - 2x)\,\mathrm{e}^{2x}.$$

이다. 그러므로

$$y^2 = \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{B - 2x}, \qquad y = \pm\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{B - 2x}}.$$

이다. $1/y^2 > 0$이므로 $B - 2x > 0$이어야 한다. 즉 해는 $x < \frac{1}{2}B$에서만 존재하고, 부호는 처음에 y가 가지는 부호에 따라 정해진다(y는 결코 영이 되지 않으므로 부호가 바뀔 수 없다). 소문항 (i)과 달리 답이 두 지수함수의 차가 아니다. 여기서는 우변의 e^{2x}이 적분인자 e^{-2x}과 정확히 상쇄되어 적분할 것이 상수만 남고, 그 때문에 일차항 $-2x$가 나타난다.

검산

- (ii)에 다시 대입해 본다. $1/y^2 = (B - 2x)\mathrm{e}^{2x}$을 미분하면 $-2y'/y^3 = -2\mathrm{e}^{2x} + 2(B - 2x)\mathrm{e}^{2x}$이므로 $y'/y^3 = \mathrm{e}^{2x} - 1/y^2$이 되고, 이것이 바로 원래 방정식이다.

- 수치적으로: (ii)에서 $y(0) = 1$로 두면 $B = 1$이므로, 공식은 $y(0.4) = \mathrm{e}^{-0.4}/\sqrt{0.2} \approx 1.49888$을 예측한다. 미분방정식을 $x = 0$에서부터 수치적으로 한 단계씩 풀어 나가면 소수점 아래 열 자리까지 같은 값을 얻는다. 또한 두 일반해 모두 무작위로 고른 많은 점과 상수에서 각자의 방정식을 만족한다.

흔한 실수

- $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$에서 음의 부호(또는 소문항 (ii)에서 인수 2)를 빠뜨려 선형 방정식을 망치는 것.
- 소문항 (ii)에서 양의 제곱근만 쓰거나, 해가 $x < \frac{1}{2}B$를 요구한다는 사실을 놓치는 것.

STEP 너머

두 방정식은 모두 베르누이(Bernoulli) 방정식(Bernoulli equation) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$의 예이다. y^n으로 나누고 $u = y^{1-n}$으로 치환하면 언제나 선형 방정식이 된다. 여기서 소문항 (i)은 $n = 2$, 소문항 (ii)는 $n = 3$인 경우이다. 해가 유한한 x에서 "폭발"할 수 있다는 사실($x \to \frac{1}{2}B$일 때처럼)은 비선형 방정식의 전형적인 특징으로, 상미분방정식(ODE) 입문 강의에서 다룬다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.