풀이

STEP I 1995, 문제 5

순수수학 • 이항급수와 적분

> **STEP I 1995, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q5

핵심 아이디어

다항식(polynomial)을 항별로 미분하면 거추장스러운 $1/r$ 인수가 사라지고, 남는 것은 거의 이항전개(binomial expansion)이다. 계수 $(-1)^{r+1}\binom{n}{r}$은 정확히 $-(1-x)^n$에서 상수항을 뺀 것의 계수이다. 일단 f'을 알면, 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)에 의해 ($f(0)=0$과 함께) f를 적분으로 나타낼 수 있고, 치환(substitution) $y = 1-t$를 하면 이것이 요구된 꼴이 된다. 그 피적분함수(integrand)는 등비급수(geometric series)이므로 곧바로 적분된다.

풀이

도함수

다음과 같이 쓰자.

$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{x^r}{r}.$$

이것은 다항식이므로 항별로 미분할 수 있다.

$$f'(x) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r} x^{r-1}.$$

$x \neq 0$일 때, 양변에 x를 곱하고 $(-1)^{r+1}x^r = -(-x)^r$을 이용하면

$$\begin{aligned} x\,\mathrm{f}'(x) &= -\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r \\ &= -\Big(\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}(-x)^r - 1\Big) \\ &= 1-(1-x)^n, \end{aligned}$$

이다. 마지막 등식은 이항정리(binomial theorem)에 의한 것이다. x로 나누면

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1-(1-x)^n}{x} \qquad (x \neq 0),$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다. ($x = 0$에서는 급수로부터 $\mathrm{f}'(0) = n$이고, $1-(1-x)^n = nx + O(x^2)$이므로 이것은 $x \to 0$일 때 우변의 극한과도 같다.)

적분 공식

f의 모든 항은 인수 x를 포함하므로 $\mathrm{f}(0) = 0$이다. 미적분학의 기본정리에 의해

$$\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(0) + \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-(1-t)^n}{t}\,\mathrm{d}t.$$

? **생각해 보기** 식의 분모에 t가 있는데, $t = 0$을 지나서 적분해도 괜찮을까?

괜찮다. 피적분함수는 사실 다항식 $\mathrm{f}'(t)$이다. 분수 꼴은 $t \neq 0$일 때 그것을 간결하게 쓴 것일 뿐이고, $t = 0$에서의 값은 극한값 n이다. 따라서 특이점(singularity)은 없으며, 식에 제거 가능한 빈틈이 있을 뿐이다.

이제 $y = 1 - t$로 치환하면 $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$이고, $t = 0$일 때 $y = 1$, $t = x$일 때 $y = 1 - x$이다. 그러면

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \int_1^{1-x} \frac{1-y^n}{1-y}\,(-\mathrm{d}y) \\ &= \int_{1-x}^{1} \frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

이다. 여기서 적분 구간의 위끝과 아래끝을 바꾸어 음의 부호를 흡수하였다. 이것이 요구된 결과이며, 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\mathrm{f}(1)$의 값

$x = 1$을 대입하면 아래끝은 0이 된다. $y \neq 1$일 때 피적분함수는 등비급수의 합

$$\frac{1-y^n}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots + y^{n-1},$$

이고, (앞에서와 마찬가지로) $y = 1$에서의 값은 극한값 n이므로 피적분함수는 $[0,1]$ 전체에서 이 다항식과 같다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(1) &= \int_0^1 (1 + y + \cdots + y^{n-1})\,\mathrm{d}y \\ &= \left[y + \frac{y^2}{2} + \cdots + \frac{y^n}{n} \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

이 되어 요구된 결과를 얻는다.

이 결과가 무엇을 뜻하는지 살펴보자. 원래의 급수에 $x = 1$을 대입하면 다음과 같은 놀라운 항등식을 얻는다.

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \binom{n}{r} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

이것은 직접 보아서는 전혀 자명하지 않다.

검산

- $n = 1$: $\mathrm{f}(x) = x$이고 $\big(1 - (1 - x)\big)/x = 1 = \mathrm{f}'(x)$이다. 또한 $\mathrm{f}(1) = 1$이다.
- $n = 4$: $\mathrm{f}(1) = 4 - \frac{6}{2} + \frac{4}{3} - \frac{1}{4} = \frac{25}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.
- 무작위로 고른 유리수 300개에서 도함수 공식을 정확히 확인하였고, 무작위 $x \in [-1.5, 1.5]$와 $n \le 15$에 대하여 (심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산한) 적분값을 급수와 비교하였으며(상대 오차 10^{-11} 미만), 모든 $n \le 40$에 대하여 $\mathrm{f}(1)$에 관한 항등식을 정확히 확인하였다.

흔한 실수

- $(1 - x)^n$의 이항전개와 맞추어 볼 때 $r = 0$인 항을 잊는 실수: $r = 1$부터의 합은 $(1 - x)^n$이 아니라 $(1 - x)^n - 1$이다.
- $\mathrm{f}(0) = 0$임을 언급하지 않고 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}'(t)\,\mathrm{d}t$라고 쓰는 실수.
- 치환 $y = 1 - t$ 후에 적분 구간의 위끝과 아래끝을 거꾸로 쓰는 실수: $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}y$의 부호가 구간을 다시 뒤집어 준다.

STEP 너머

수 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$을 조화수(harmonic numbers)라고 한다. 이 수는 $\ln n$처럼 증가하며, $H_n - \ln n$은 오일러(Euler) 상수(Euler's constant) $\gamma \approx 0.5772$로 수렴(converge)한

다. 여기서 쓴 기법, 즉 미분하여 거추장스러운 분모를 없앤 뒤 다시 적분하는 방법은 $\ln(1+x)$와 $\tan^{-1} x$의 거듭제곱급수(power series)를 얻는 방법과 같으며, 이것을 무한급수에 대해 정당화하는 일(거듭제곱급수의 항별 미분(term-by-term differentiation))은 대학 1학년 해석학(analysis)의 핵심 주제이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)가 이 내용을 꼼꼼히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.