풀이

# STEP I 1995, 문제 4

순수수학 • 드무아브르 정리

> **STEP I 1995, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q4

## 핵심 아이디어

드무아브르 정리(de Moivre's theorem)를 쓰면 $\sin 5\theta$는 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^5$의 허수부(imaginary part)가 되고, 이항정리(binomial theorem)를 쓰면 이 거듭제곱을 $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 곱들로 전개할 수 있다. 허수부의 모든 항에는 $\sin\theta$의 홀수 거듭제곱이 들어 있으므로, 인수 하나를 묶어 내고 나머지는 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$를 이용해 코사인으로 바꿀 수 있다. 그러면 각 $\frac{1}{5}\pi$에서는 $\sin 5\theta = 0$이므로 이 각이 특별해지고, $\cos^2\theta$에 대한 이차방정식(quadratic)이 남는다.

## 풀이

### 항등식

$c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$라 하자. 드무아브르 정리에 의해

$$\cos 5\theta + \mathrm{i}\sin 5\theta = (c + \mathrm{i}s)^5.$$

계수 $1, 5, 10, 10, 5, 1$을 갖는 이항정리에 의해

$$(c + \mathrm{i}s)^5 = c^5 + 5c^4(\mathrm{i}s) + 10c^3(\mathrm{i}s)^2 + 10c^2(\mathrm{i}s)^3 + 5c(\mathrm{i}s)^4 + (\mathrm{i}s)^5.$$

$\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, $\mathrm{i}^4 = 1$, $\mathrm{i}^5 = \mathrm{i}$이므로, 허수 항은 $\mathrm{i}s$의 홀수 거듭제곱을 가진 항들이다.

$$\mathrm{Im}(c + \mathrm{i}s)^5 = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5.$$

$c$와 $s$는 모두 실수이므로, 허수부를 비교하면

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= s\left(5c^4 - 10c^2s^2 + s^4\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2(1-c^2) + (1-c^2)^2\right)\\ &= s\left(5c^4 - 10c^2 + 10c^4 + 1 - 2c^2 + c^4\right)\\ &= s\left(16c^4 - 12c^2 + 1\right),\end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 $s^2 = 1 - c^2$를 이용했다. 즉

$$\sin 5\theta = \sin\theta\left(16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1\right),$$

이므로 요구된 항등식(identity)이 성립한다.

### $\cos^2\frac{1}{5}\pi$의 값 구하기

$\theta = \frac{1}{5}\pi$를 대입하자. 그러면 $\sin 5\theta = \sin\pi = 0$이고, $0 < \frac{1}{5}\pi < \pi$이므로 $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$이다. 따라서 항등식을 $\sin\theta$로 나눌 수 있고, $x = \cos^2\frac{1}{5}\pi$는 다음을 만족한다.

$$16x^2 - 12x + 1 = 0, \qquad \text{따라서} \qquad x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 64}}{32} = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}.$$

? **생각해 보기** 이 이차방정식의 근은 두 개이다. 어느 것이 $\cos^2\frac{1}{5}\pi$인가?

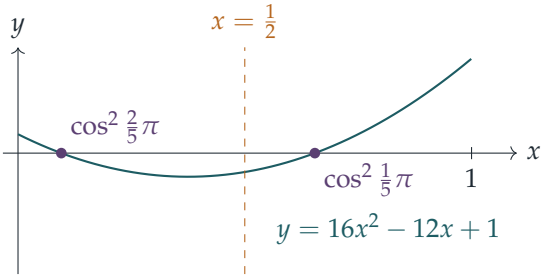
근을 고르려면 $\cos\frac{1}{5}\pi$에 대한 사실이 하나 더 필요하다. $0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{4}\pi$이고 cos는 $[0, \frac{1}{2}\pi]$에서 감소하므로 $\cos\frac{1}{5}\pi > \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고, 따라서

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi > \tfrac{1}{2}.$$

이제 $\sqrt{5} < 3$에서 $\frac{3-\sqrt{5}}{8} < \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$이고, $\sqrt{5} > 1$에서 $\frac{3+\sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}$이다. $\frac{1}{2}$보다 큰 근은 정확히 하나이므로

$$\cos^2\tfrac{1}{5}\pi = \frac{3+\sqrt{5}}{8}.$$

(다른 근이 쓸모없는 근인 것은 아니다. $\theta = \frac{2}{5}\pi$에서도 $\sin 5\theta = 0$이고 $\sin\theta \neq 0$이며, $\cos^2\frac{2}{5}\pi = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$이다.)



### $\cos\frac{1}{5}\pi$ 이끌어 내기

$0 < \frac{1}{5}\pi < \frac{1}{2}\pi$이므로 $\cos\frac{1}{5}\pi > 0$이고, 따라서 양의 제곱근을 택한다.

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{16}} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}.$$

마지막으로 $(1+\sqrt{5})^2 = 1+2\sqrt{5}+5 = 6+2\sqrt{5}$이고 $1+\sqrt{5} > 0$이므로 $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$이고,

$$\cos\tfrac{1}{5}\pi = \tfrac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

이므로 요구된 결과가 성립한다.

## 검산

- $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 항등식은 $\sin\frac{5}{2}\pi = 1\cdot(0-0+1) = 1$을 주는데, 이는 옳다. $\theta$가 작을 때: 괄호 안이 $16-12+1=5$에 가까워지므로 양변은 모두 약 $5\theta$이다.
- 수치로 보면 $\cos 36^\circ \approx 0.809017$이고 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \approx 0.809017$이다. 또한 $\cos^2 36^\circ \approx 0.654508 = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$이다. 항등식은 $10^4$개의 무작위 각에서도 확인했다.
- $\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$는 황금비(golden ratio) $\varphi$의 절반인데, 황금비는 정오각형(regular pentagon)에서 대각선과 변의 길이의 비이다. $36^\circ$라는 각이 이를 암시한다.

## 흔한 실수

- i의 거듭제곱에서 생기는 부호를 놓치는 것: $s^3$ 항에는 $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$가 붙어 $-10c^2s^3$이 된다.
- 이유 없이 이차방정식의 근을 고르는 것. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$를 배제하려면 $\cos^2\frac{1}{5}\pi > \frac{1}{2}$와 같은 부등식이 필요하다.
- $\sin\frac{1}{5}\pi \neq 0$임을 밝히지 않고 $\sin\theta$로 나누는 것.

## STEP 너머

같은 방법으로 $\sin n\theta / \sin\theta$와 $\cos n\theta$를 $\cos\theta$의 다항식으로 나타낼 수 있는데, 이것이 체비쇼프 다항식(Chebyshev polynomials)이며 수치해석(numerical analysis) 곳곳에 등장한다. 수 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/5}$는 1의 다섯제곱근(fifth roots of unity)이며, $\cos\frac{1}{5}\pi$가 제곱근만으로 표현된다는 사실 때문에 정오각형을 자와 컴퍼스(ruler and compasses)로 작도할 수 있다. 어떤 정다각형이 작도 가능한지에 관한 가우스(Gauss)의 정리는 대학 학부 갈루아 이론(Galois theory)의 백미이다. 드무아브르 정리 뒤에 숨은 기하학에 대해서는 Needham, *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.