풀이

STEP I 1995, 문제 3

순수수학 • 망원급수

> **STEP I 1995, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q3

핵심 아이디어

합의 연속한 항들이 대부분의 부분을 공유할 때, 각 항을 차 $\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)$ 꼴로 쓰면 거의 모든 것이 소거된다. 즉 합이 **망원급수처럼 접힌다**(*telescopes*). 핵심은 그 차가 원하는 항이 되도록 f를 고르는 것인데, 여기서는 문제가 대신 골라 준다. 부호가 번갈아 바뀌는 급수(alternating series)의 경우, 이를 **모든** 세제곱의 합에서 짝수 세제곱의 합의 두 배를 뺀 것으로 쓰는 것이 요령이며, 그러면 소문항 (ii)의 결과를 두 번 쓰게 된다.

풀이

소문항 (i)

합을 모두 풀어 쓰면 다음과 같다.

$$\sum_{r=1}^{n}\{\mathrm{f}(r)-\mathrm{f}(r-1)\}=\{\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)\}+\{\mathrm{f}(2)-\mathrm{f}(1)\}+\cdots+\{\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(n-1)\}.$$

$\mathrm{f}(1),\mathrm{f}(2),\ldots,\mathrm{f}(n-1)$은 각각 더하기 부호로 한 번, 빼기 부호로 한 번 나타나므로 모두 소거된다. 첫 번째 괄호의 $-\mathrm{f}(0)$과 마지막 괄호의 $\mathrm{f}(n)$만 남으므로 $\mathrm{f}(n)-\mathrm{f}(0)$이 되어, 원하는 결과를 얻는다.

"모두 소거된다"보다 더 엄밀한 논증을 원한다면 n에 대한 수학적 귀납법(induction)을 쓰면 된다. $n=1$일 때 합은 $\mathrm{f}(1)-\mathrm{f}(0)$이다. $n=k$일 때 결과가 성립한다면, 다음 항을 더하여

$$\mathrm{f}(k)-\mathrm{f}(0)+\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(k)=\mathrm{f}(k+1)-\mathrm{f}(0),$$

을 얻는데, 이것이 $n=k+1$일 때의 결과이다. 따라서 모든 $n\geq 1$에 대하여 성립한다.

소문항 (ii)

$\mathrm{f}(r) = r^2(r+1)^2$이면 $\mathrm{f}(r-1) = (r-1)^2r^2$이다. 두 식 모두 인수 r^2을 가지므로, 이를 묶어내고 제곱의 차(difference of two squares)를 이용한다.

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1) &= r^2[(r+1)^2 - (r-1)^2] \\ &= r^2[(r+1)+(r-1)][(r+1)-(r-1)] \\ &= r^2 \cdot 2r \cdot 2 = 4r^3.\end{aligned}$$

이제 $r = 1$부터 n까지 더하고 소문항 (i)을 적용한다. $\mathrm{f}(0) = 0$이므로

$$4\sum_{r=1}^{n} r^3 = \mathrm{f}(n) - \mathrm{f}(0) = n^2(n+1)^2, \qquad \text{따라서} \qquad \boxed{\sum_{r=1}^{n} r^3 = \tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2.}$$

소문항 (iii)

이 급수는 $2n+1$개의 항으로 이루어져 있다. 홀수의 세제곱은 더하기 부호, 짝수의 세제곱은 빼기 부호를 가지며, 마지막 항은 홀수의 세제곱 $(2n+1)^3$이다.

> **생각해 보기** $\sum r^3$에 대한 공식만으로 번갈아 바뀌는 부호를 어떻게 처리할 수 있을까?

$(2n+1)^3$까지 **모든** 세제곱의 합에서 출발한다. 이 합에서는 모든 짝수 세제곱이 더하기 부호를 갖는데, 우리가 원하는 것은 빼기 부호이므로 각 짝수 세제곱을 두 번 빼 준다.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - \cdots + (2n+1)^3 = \sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 2\sum_{m=1}^{n} (2m)^3.$$

짝수 세제곱은 $m = 1, \ldots, n$에 대하여 $(2m)^3 = 8m^3$이고, 그중 가장 큰 것은 $(2n)^3$이다. 소문항 (ii)를 두 번, 그중 한 번은 n 대신 $2n+1$을 넣어 사용하면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+1} k^3 - 16\sum_{m=1}^{n} m^3 &= \tfrac{1}{4}(2n+1)^2(2n+2)^2 - 16\cdot\tfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ &= (2n+1)^2(n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2 \\ &= (n+1)^2[(2n+1)^2 - (2n)^2] \\ &= (n+1)^2(4n+1),\end{aligned}$$

이다. 여기서 둘째 줄에서는 $(2n+2)^2 = 4(n+1)^2$을, 마지막 줄에서는 제곱의 차 $(2n+1)^2 - (2n)^2 = (2n+1+2n)\cdot 1$을 이용하였다. 따라서

$$\boxed{1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(4n+1).}$$

검산

- $n = 0$일 때 급수는 $1^3 = 1$뿐이고, $(0+1)^2(0+1) = 1$이다.
- $n = 1$일 때: $1 - 8 + 27 = 20$이고, $2^2 \times 5 = 20$이다.
- $n = 2$일 때: $1 - 8 + 27 - 64 + 125 = 81$이고, $3^2 \times 9 = 81$이다.
- 항들을 $(2m+1)^3 - (2m)^3 \approx 12m^2$으로 짝지을 수 있으므로, 답은 마지막 항의 대략 절반인 $(2n+1)^3/2$ 정도로 증가해야 한다. 실제로 $(n+1)^2(4n+1) \approx 4n^3$이고, 이는 $\sum 12m^2 \approx 4n^3$과 일치한다.

또한 0부터 199까지의 모든 n에 대하여 직접 합을 계산하여 소문항 (ii)와 (iii)을 확인하였다.

흔한 실수

- 짝수 세제곱을 한 번만 빼는 것. 그러면 $\sum k^3 - \sum(2m)^3$, 즉 번갈아 더한 합이 아니라 홀수 세제곱의 합이 된다.
- 짝수 세제곱을 $(2n+2)^3$까지 취하거나, 모든 세제곱의 합 공식에서 $2n+1$ 대신 n을 쓰는 것. 항의 개수를 주의 깊게 세어야 한다.

STEP 너머

소문항 (i)은 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)의 이산적 유사물이다. 차 $\mathrm{f}(r) - \mathrm{f}(r-1)$이 도함수의 역할을 하고, 이를 더하면 f를 되찾는다. 이는 F'을 적분하면 $F(b) - F(a)$가 되는 것과 똑같다. 이러한 "유한 차분의 미적분(calculus of finite differences)"을 이용하면 알맞은 f를 찾아 어떤 다항식이든 합을 구할 수 있으며, 같은 망원급수 아이디어가 급수의 수렴(convergence)에 관한 많은 증명의 바탕을 이룬다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에 망원급수와 이런 종류의 급수에 관한 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.