풀이

STEP I 1995, 문제 2

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 1995, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q2

핵심 아이디어

소문항 (i)에서는 두 적분 모두 따로 놓고 보면 쉽지 않지만, 둘을 짝지으면 훌륭하게 맞물린다. 두 적분을 더하면 약분되어 1이 되는 분수가 나오고, 빼면 분자가 정확히 분모의 도함수(derivative)가 된다. 쉬운 적분 두 개로부터 S와 T에 대한 연립방정식(simultaneous equations) 두 개를 얻는다. 소문항 (ii)에서 치환(substitution) $x = \sin^2 t$를 고르는 까닭은 이 치환이 $\frac{1}{x} - 1$을 완전제곱식 $\cot^2 t$로 바꾸어 제곱근이 사라지기 때문이다. 그 뒤로는 줄곧 배각 공식(double-angle formulae)만 쓰면 된다.

풀이

소문항 (i)

피적분함수(integrand)를 더하면

$$S + T = \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c_1.$$

빼면

$$S - T = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,\mathrm{d}x.$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x + \sin x) = -\sin x + \cos x$이므로 분자는 분모의 도함수이다. 따라서 이 적분은 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 꼴이고,

$$S - T = \ln|\cos x + \sin x| + c_2.$$

이 두 식을 더하고 빼서 각각 반으로 나누면

$$S = \tfrac{1}{2}(x + \ln|\cos x + \sin x|) + C,$$
$$T = \tfrac{1}{2}(x - \ln|\cos x + \sin x|) + C',$$

이다. 여기서 C와 C'은 임의의 상수이다. 이 결과는 피적분함수가 정의되는 구간, 즉 $\cos x + \sin x \neq 0$인 임의의 구간에서 성립한다.

소문항 (ii)

구하는 적분을 I라 하자. $x = \sin^2 t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = 2\sin t \cos t \, \mathrm{d}t$이다. 적분 구간의 끝을 보면, $x = \frac{1}{4}$일 때 $\sin t = \frac{1}{2}$이므로 $t = \frac{\pi}{6}$이고, $x = \frac{1}{2}$일 때 $\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $t = \frac{\pi}{4}$이다. (t는 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$에서 택한다. t가 이 구간을 움직일 때 x는 $\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{2}$까지 증가한다.)

다음으로 제곱근을 정리하면

$$\frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}, \qquad \text{이므로} \qquad \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

생각해 보기 제곱근이 $|\cos t / \sin t|$가 아니라 $\cos t / \sin t$인 까닭은 무엇인가?

일반적으로 $\sqrt{\cot^2 t} = |\cot t|$이다. 그러나 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$에서는 $\sin t$와 $\cos t$가 모두 양수이므로 $\cot t > 0$이고, 절댓값 기호를 없앨 수 있다. 바로 이 때문에 t를 제1사분면에서 택한 것이다.

치환하면 $\sin t$가 약분된다.

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (1 - 4\sin^2 t) \frac{\cos t}{\sin t} 2\sin t \cos t \, \mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 2\cos^2 t \, (1 - 4\sin^2 t) \, \mathrm{d}t.$$

이제 배각 공식을 써서 적분하기 쉬운 꼴로 만든다. $2\cos^2 t = 1 + \cos 2t$이고 $8\sin^2 t \cos^2 t = 2\sin^2 2t = 1 - \cos 4t$이므로

$$2\cos^2 t - 8\sin^2 t \cos^2 t = (1 + \cos 2t) - (1 - \cos 4t) = \cos 2t + \cos 4t.$$

따라서

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (\cos 2t + \cos 4t) \, \mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}\sin 2t + \tfrac{1}{4}\sin 4t \right]_{\pi/6}^{\pi/4} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\sin\pi \right) - \left(\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{2\pi}{3} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4} + \tfrac{\sqrt{3}}{8} \right), \end{aligned}$$

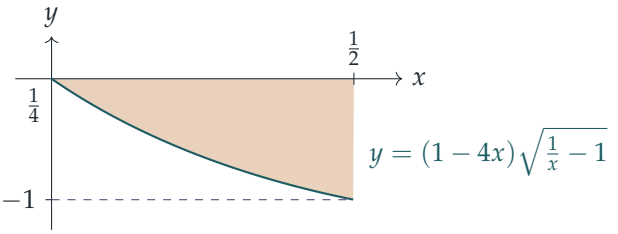
이고, 그러므로

$$\int_{1/4}^{1/2} (1 - 4x) \sqrt{\frac{1}{x} - 1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{8}.$$

검산

- 부호: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$에서 $1 - 4x < 0$이고 제곱근은 양수이므로 피적분함수는 음수이고, 따라서 I도 음수여야 한다. 실제로 $4 - 3\sqrt{3} \approx -1.196$이므로 $I \approx -0.1495$이다. 아래 그래프는 피적분함수를 나타낸다.

- 원래 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 직접 적용하면 $-0.149519\ldots$를 얻으며, 이는 소수점 아래 열째 자리까지 $\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$과 일치한다.
- 소문항 (i)은 미분하여 확인한다. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(x + \ln(\cos x + \sin x)\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$. 예를 들어 $[0,1]$에서 S와 T는 모두 수치 적분(quadrature) 값(0.66168과 0.33832)과 일치한다.



흔한 실수

- 적분 구간을 $t = \frac{\pi}{6}$과 $t = \frac{\pi}{4}$로 바꾸는 것을 잊거나, x로 되돌려 치환할 때 잘못하는 실수.
- $\mathrm{d}x$에서 인수 $2\sin t\cos t$를 빠뜨리거나, $\mathrm{d}x = 2\sin t\,\mathrm{d}t$로 쓰는 실수.
- 양수 답을 내는 실수. 피적분함수가 구간 전체에서 음수이므로 답이 양수라면 부호 오류가 있다는 신호이다.

STEP 너머

소문항 (i)의 기법, 즉 까다로운 적분을 "짝"이 되는 적분과 묶어 합과 차가 모두 쉬워지게 하는 기법은 거듭 등장한다. 예를 들어 $\int \mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x$와 $\int \mathrm{e}^x\sin x\,\mathrm{d}x$에서 그렇고, 복소수 형태로는 $\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$를 적분하는 방법으로 나타난다. 소문항 (ii)는 일반적인 원리의 작은 예이다. 잘 고른 치환은 대수적인 피적분함수를 삼각다항식(trigonometric polynomial)으로 바꿀 수 있으며, 이것이 푸리에 급수(Fourier series)의 출발점이다. 이런 성격의 적분을 더 많이, 자세한 논의와 함께 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.