풀이

STEP I 1995, 문제 12

확률과 통계 • 배열과 경우의 수

STEP I 1995, 12번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/95-s1-q12

핵심 아이디어

n명의 학생을 배열하는 모든 방법은 일어날 가능성이 같으므로, 각 확률은 조건을 만족하는 배열의 수를 $n!$로 나눈 값이다. 더 나아가 대칭성(symmetry)에 의해 하키 선수들이 어느 자리를 차지하는지만 신경 쓰면 된다. 즉 r개의 자리로 이루어진 $\binom{n}{r}$개의 집합 각각이 선택될 가능성이 모두 같다. 그러면 각 소문항은 자리를 고르는 경우의 수 문제가 된다. 마지막 소문항에서 틈에 관한 힌트는 표준적인 "별과 막대(stars and bars)" 기법이다. 하키 선수가 아닌 학생들을 먼저 한 줄로 세우면, 하키 선수들은 그 사이의 서로 다른 틈에 들어가야 한다.

풀이

이 풀이 전체에서 r명의 하키 선수를 H, 나머지 $n-r$명의 학생을 N이라 부른다. (서로 구별되는) 학생들의 $n!$가지 순서는 모두 일어날 가능성이 같다. H들이 차지하는 r개 자리의 집합은 어느 것이든 같은 수, 즉 $r!\,(n-r)!$가지의 순서로부터 생기므로, H들이 차지하는 자리의 집합은 가능한 $\binom{n}{r}$개의 집합 중 어느 것이 될 가능성도 같다. 두 관점 가운데 더 편리한 쪽을 사용한다.

소문항 (i)

양 끝의 두 자리를 먼저 채운다. 왼쪽 끝의 학생이 하키 선수일 확률은 $\frac{r}{n}$이다. 이 조건 아래에서 오른쪽 끝의 학생은 남은 $n-1$명 중 한 명이며 각각 가능성이 같고, 그중 $r-1$명이 하키 선수이다. 따라서

$$\mathrm{P}(\text{양 끝에 모두 하키 선수}) = \frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1} = \frac{r(r-1)}{n(n-1)}.$$

(이 값이 0이 아니려면 $r \geq 2$이어야 하는데, 문제에서 이를 보장한다.)

소문항 (ii)

하키 선수들이 모두 붙어 서는 것은 그들의 자리가 연속한 r개의 자리로 이루어진 묶음을 이룰 때와 정확히 같다. 이러한 묶음은 $1, 2, \ldots, n-r+1$번 자리에서 시작할 수 있으므로, $\binom{n}{r}$개 중 조건을 만족하는 자리의 집합은 $n-r+1$개이다.

$$\mathrm{P}(\text{모두 붙어 있음}) = \frac{n-r+1}{\binom{n}{r}} = \frac{r!\,(n-r+1)!}{n!}.$$

같은 방법으로, r명의 하키 선수를 하나의 "슈퍼 학생"으로 묶어도 된다. $n-r+1$개 단위의 순서는 $(n-r+1)!$가지이고 묶음 안의 순서는 $r!$가지이므로 같은 답을 얻는다. 검산 삼아 $r = n$일 때 이 값은 1이 되며, 마땅히 그래야 한다.

소문항 (iii)

하키 선수가 아닌 $n-r$명을 먼저 한 줄로 세운다. 이들은 $n-r+1$개의 틈을 만든다. 첫 번째 학생 앞에 하나, 이웃한 두 학생 사이마다 하나, 마지막 학생 뒤에 하나이다.



어떤 두 하키 선수도 이웃하지 않을 필요충분조건은 각 틈에 하키 선수가 많아야 한 명씩 들어가는 것이다. (두 H가 같은 틈에 있으면 서로 이웃하게 되고, 서로 다른 틈에 있으면 적어도 한 명의 N이 그 사이를 가른다.) 따라서 조건을 만족하는 배열은 $n-r+1$개의 틈 중 r개를 고르고, 고른 틈마다 H를 한 명씩 넣는 것에 대응한다.

자리를 세어 보자. 조건을 만족하는 H의 자리 집합은 어느 r개의 틈을 쓰는지에 따라 결정되므로, 그러한 집합은 $\binom{n-r+1}{r}$개이다. 그러므로

$$\mathrm{P}(\text{어느 두 명도 붙어 있지 않음}) = \frac{\binom{n-r+1}{r}}{\binom{n}{r}} = \frac{(n-r+1)!\,(n-r)!}{(n-2r+1)!\,n!}.$$

(학생들의 순서를 직접 세어도 같은 결과를 얻는다. N들을 배열하는 방법이 $(n-r)!$가지, 서로 다른 r명의 H를 서로 다른 틈에 넣는 방법이 $(n-r+1)(n-r)\cdots(n-2r+2) = \frac{(n-r+1)!}{(n-2r+1)!}$가지이고, 이를 모두 $n!$로 나누면 된다.)

? **생각해 보기** 하키 선수들을 모두 떨어뜨려 놓는 것이 불가능한 경우는 언제인가?

서로 다른 틈이 r개 필요한데, 틈은 $n-r+1$개뿐이다. 따라서

- $r \leq n-r+1$, 즉 $n \geq 2r-1$이면 확률은 위에서 구한 0이 아닌 값이다.

- $r > n - r + 1$, 즉 $n \leq 2r - 2$이면 (하키 선수들을 떼어 놓기에 다른 학생이 너무 적으므로) 확률은 0이다.

경계인 경우 $n = 2r - 1$에서는 배열이 $HNHN\cdots NH$ 꼴로 강제되며, 공식은 $\frac{r!\,(r-1)!}{(2r-1)!} = 1/\binom{2r-1}{r}$을 준다. 이는 H들이 정확히 그 번갈아 나오는 r개의 자리에 놓일 확률이다.

검산

- $n = 10, r = 3$이라 하자. 그러면 (i)은 $\frac{6}{90} = \frac{1}{15}$, (ii)는 $\frac{8}{120} = \frac{1}{15}$, (iii)은 $\binom{8}{3}/\binom{10}{3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$이다. 세 값 모두 가능한 120개의 자리 집합을 컴퓨터로 전수 조사한 결과와 일치하며, 공식들은 $2 \leq r \leq n \leq 14$인 모든 경우에 대해 이 방법으로 확인하였다(또한 $n \leq 7$에 대해서는 $n!$가지 순서 전체와 대조하였다).
- $r = 2$일 때 소문항 (ii)와 (iii)은 여사건(complementary events) 관계이며(두 선수는 이웃하거나 이웃하지 않거나 둘 중 하나이다), 실제로 $\frac{2}{n} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2}{n} + \frac{n-2}{n} = 1$이다.

흔한 실수

- 틈을 $n - r - 1$개(하키 선수가 아닌 학생들 사이에 엄밀히 끼인 틈)만 세고 줄의 양 끝을 잊는 것.
- 모델을 섞는 것: 분자에서는 H의 자리를 세면서 분모에서는 학생들의 전체 순서($n!$)를 세는 것. 한 가지 관점을 정해 끝까지 지켜야 한다.
- 답이 0이 아닐 조건을 $n \geq 2r$로 제시하는 것. $n = 2r - 1$인 경우(H로 시작하고 H로 끝나며 번갈아 나오는 배열)도 가능하다.

STEP 너머

틈을 이용한 논법은 "별과 막대" 아이디어로, 열거 조합론(enumerative combinatorics)의 핵심 도구이다. 같은 수 $\binom{n-r+1}{r}$은 "$\{1, \ldots, n\}$의 r-부분집합 중 연속한 두 정수를 포함하지 않는 것은 몇 개인가"에 대한 답이기도 하며, 이를 r에 대해 모두 더하면 피보나치 수(Fibonacci numbers)가 나온다. 사람들의 순서를 자리의 집합으로 바꾸는 단계는 대칭성을 활용해 표본공간(sample space)을 줄이는 방법을 처음 맛보는 것으로, 대학 확률론에서 끊임없이 쓰인다. Blitzstein과 Hwang의 *Introduction to Probability*(확률론 입문)에는 경우의 수와 확률의 고전적 정의(naive definition of probability)를 다루는 훌륭한 장들이 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.