풀이

STEP I 1995, 문제 11

역학 • 원기둥 사이의 마찰

> **STEP I 1995, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q11

핵심 아이디어

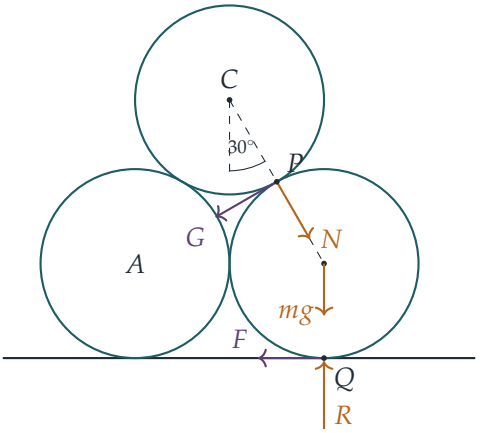
아래에 놓인 원기둥 하나를 살펴보자. 그 무게와 위쪽 원기둥이 주는 수직항력(normal reaction)은 모두 그 중심을 지나므로, 중심에 대한 모멘트(moment)를 취하면 두 마찰력(friction force)만 남고, 따라서 두 마찰력의 크기는 같아야 한다. 이어서 수평 방향으로 한 번 힘을 분해(resolving)하면 원기둥끼리의 접촉점에서 마찰력과 수직항력의 비가 정해지고, 나머지는 서로 접하는 세 원의 기하($30°$와 $60°$의 각)가 해결해 준다.

풀이

모형

원기둥을 반지름이 r인 균일한 강체(rigid body) 원기둥으로 보고, 축에 수직인 단면에서 생각한다. 그러면 각 원기둥은 원이 되고, 그 무게는 중심에 작용한다. 모든 접촉점의 마찰계수(coefficient of friction)는 똑같이 μ이다. 아래 두 원기둥을 A(왼쪽), B(오른쪽)라 하고, 위의 원기둥을 C라 하자. A와 B의 중심은 높이 r에서 서로 $2r$만큼 떨어져 있고, C의 중심은 두 중심에서 각각 $2r$만큼 떨어져 있다. 따라서 세 중심이 이루는 삼각형은 정삼각형이고, C의 중심에서 B의 중심으로 가는 직선은 연직선과 $30°$의 각을 이룬다.

당분간 A와 B는 서로 힘을 주고받지 않는다고 가정하며, 이 점은 마지막에 다시 다룬다. 대칭성에 의해 B와, C의 오른쪽 접촉점만 살펴보면 충분하다.



B에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 중심에 작용하는 무게 mg;
- 지면과의 접촉점 Q에서, 위쪽으로 작용하는 수직항력 R와 A 쪽으로 수평하게 작용하는 마찰력 F;
- C와의 접촉점 P에서, 중심선을 따라 (아래쪽 바깥 방향으로, 연직선과 30°를 이루며) 작용하는 수직항력 N과, 공통접선(common tangent)을 따라 작용하는 마찰력 G. 이 마찰력은 아래쪽이면서 A 쪽, 즉 수평선 아래로 30°인 방향으로 작용한다고 가정한다.

만약 어느 마찰력이 실제로는 반대 방향으로 작용한다면, 그 값이 음수로 나올 뿐이다.

B의 중심에 대한 모멘트

무게는 B의 중심을 지나고, 두 원 사이의 수직항력은 두 중심을 잇는 직선을 따라 작용하므로 N도 중심을 지난다. 두 마찰력은 모두 접선을 따라 작용하며, 중심으로부터의 수직 거리는 r이다. 맨 아래에서 A 쪽을 향하는 F는 그림에서 B를 시계 방향으로 돌리고, P에서 접선을 따라 아래쪽으로 A를 향하는 G는 이를 반시계 방향으로 돌린다. 따라서

$$Fr = Gr, \qquad \text{그러므로} \qquad F = G.$$

B에 대한 수평 방향 분해

N의 바깥쪽 수평 성분은 $N\sin 30^\circ = \frac{1}{2}N$이다. F와, G의 수평 성분 $G\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}G$는 모두 안쪽을 향한다. 따라서

$$\tfrac{1}{2}N = F + \tfrac{\sqrt{3}}{2}G = G\left(1 + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

이고, 그러므로

$$\frac{G}{N} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2-\sqrt{3}.$$

이 값은 양수이므로 G는 실제로 가정한 방향으로 작용하며, $F = G$도 마찬가지이다.

접촉점 P에서 미끄러지지 않으려면 $G \le \mu N$이어야 한다. 즉

$$\mu \ge 2 - \sqrt{3}.$$

지면과의 접촉

지면과의 접촉점에서 더 큰 마찰이 필요하지는 않은지도 확인해야 한다. C에 대해, B가 주는 힘은 연직선과 30°를 이루며 왼쪽 위로 향하는 N과, 접선을 따라 위쪽으로 수평선과 30°를 이루는 G이다. 이들의 연직 성분은 $\frac{\sqrt{3}}{2}N$과 $\frac{1}{2}G$이고, 대칭성에 의해 A도 똑같은 기여를 한다. C에 대해 연직 방향으로 분해하면

$$2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}G\right) = mg \implies N\left(\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3}\right) = mg \implies N = \tfrac{1}{2}mg.$$

전체 계의 무게는 $3mg$이고 대칭성에 의해 똑같이 나뉘므로, 전체 계에 대해 연직 방향으로 분해하면 $R = \frac{3}{2}mg$이다. 그러면

$$\frac{F}{R} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{2}mg}{\frac{3}{2}mg} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < 2 - \sqrt{3},$$

이므로 $\mu \ge 2 - \sqrt{3}$이기만 하면 지면과의 접촉도 유지된다. 결정적인 것은 원기둥끼리의 접촉이다.

> **생각해 보기** A와 B는 서로 닿아 있다. 둘 사이의 힘을 무시해도 되는 이유는 무엇인가?

두 원기둥은 서로를 밀어낼 수만 있으므로, A가 중심선을 따라 크기 $S \ge 0$인 힘으로 B를 바깥쪽으로 민다고 하자. 이 힘은 B의 중심을 지나므로 모멘트 방정식은 여전히 $F = G$를 주지만, 수평 방향 분해는 $\frac{1}{2}N + S = G\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이 된다. 한편 C에 대한 연직 방향 방정식은 그대로 성립하고, 두 식을 연립하여 풀면 G/N은 S가 커질수록 커진다는 것을 알 수 있다($S = 0$일 때 그 값은 $2 - \sqrt{3}$이다). 방정식만으로는 S가 정해지지 않으므로 이 문제는 정역학적으로 부정정(statically indeterminate)이며, 필요한 마찰이 가장 작은 것은 $S = 0$일 때이다. 따라서 가능한 마찰 계수의 최솟값은 요구한 대로 $2 - \sqrt{3}$이다.

검산

- $2 - \sqrt{3} = \tan 15° \approx 0.268$이다. 따라서 원기둥끼리의 접촉점에서 전체 반력은 수직 방향과 정확히 15°를 이루는데, 이는 기하에 나오는 30°의 절반이다. 계산이 맞았다는 반가운 신호이다.
- 지면에서의 비 $(2 - \sqrt{3})/3 \approx 0.089$는 원기둥끼리의 비의 3분의 1인데, 이는 이치에 맞다. 지면은 N의 세 배인 $\frac{3}{2}mg$를 떠받치지만 마찰력의 크기는 같기 때문이다.

- 수치적으로 검산해 보았다. B와 C에 대한 모든 힘과 모멘트 방정식에 값을 대입하고 미지의 미는 힘 $S \geq 0$에 대해 최소화하니, μ의 최솟값이 0.267949…로 나와 $2 - \sqrt{3}$과 일치했다.

흔한 실수

- 중심 대신 지면과의 접촉점이나 P에 대해 모멘트를 취하는 것. 이렇게 해도 풀리기는 하지만 N이 끼어들어 계산이 지저분해진다. 중심에 대해 취하면 mg와 N이 한꺼번에 사라진다.
- 지면만 확인하는 것. 지면과의 접촉점에서는 훨씬 작은 마찰만 필요하므로, 틀린 임계값이 나온다.
- C에 대해 연직 방향으로 분해할 때, 뉴턴(Newton)의 제3법칙에 의해 C에 작용하는 마찰력이 접선을 따라 **위쪽**으로 작용한다는 것을 잊는 것.

STEP 너머

아래 두 원기둥 사이의 힘 S는 평형(equilibrium) 방정식만으로는 구할 수 없다. 이 구조는 **정역학적으로 부정정**이며, 그래서 문제는 현명하게도 가능한 모든 S의 값에 대해 마찰의 최솟값을 묻는다. 공학에서는 이런 계를 탄성 변형을 모형화하여 해결하며, 쌓아 놓은 파이프나 모래 더미 같은 입상 물질의 역학에서도 같은 문제가 나타난다. 정역학, 마찰, 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬 책으로는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.