풀이

STEP I 1995, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 튀어 오름

> **STEP I 1995, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/95-s1-q10

핵심 아이디어

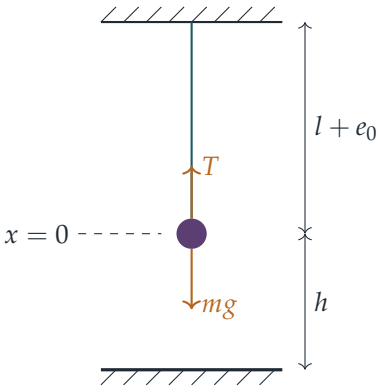
평형 위치(equilibrium position)에서부터 거리를 재면 무게와 장력(tension)의 평형 부분이 정확히 상쇄되므로, 균형을 이루지 않는 힘은 변위 x에 비례하는 훅의 법칙(Hooke's law)에 따른 복원력(restoring force)뿐이다. 따라서 단진동(simple harmonic motion)이 일어나고, 그 에너지 방정식이 바로 속력 공식이다. 그다음은 모두 계산을 정리하는 일이다. 에너지 방정식은 공을 $x = 0$과 바닥면 사이에서 옮겨 주고, 뉴턴의 실험 법칙(Newton's experimental law)은 튈 때마다 속도의 방향을 바꾸고 크기를 일정 비율로 줄인다.

풀이

공은 질점(particle)으로, 줄은 가볍고 탄성이 있으며 늘어나 있는 동안 훅의 법칙을 따르는 것으로 모형화한다. 공기 저항은 무시하고, 튀어 오르는 충돌은 순간적으로 일어난다고 본다. 풀이 전체에서

$$\omega^2 = \frac{\lambda}{lm}.$$

로 쓴다.



평형 상태의 길이

평형 상태에서 늘어난 길이(extension)를 e_0이라 하면 장력은 $T_0 = \lambda e_0 / l$이다. 평형 상태의 공에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면 $T_0 = mg$이므로

$$\frac{\lambda e_0}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad e_0 = \frac{mgl}{\lambda},$$

이고, 전체 길이는 $l + e_0 = l(1 + mg/\lambda)$이다. 이것이 보이려던 것이다.

속력 공식

평형 위치 아래로 공까지의 거리를 x라 하고, 아래 방향을 양의 방향으로 잡는다. $x \geq 0$이면 늘어난 길이가 $e_0 + x > 0$이므로 줄은 팽팽하고 장력은 $\lambda(e_0 + x)/l$이다. 아래 방향으로 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$m\ddot{x} = mg - \frac{\lambda(e_0 + x)}{l} = -\frac{\lambda x}{l},$$

이다. $\lambda e_0 / l = mg$이기 때문이다. 따라서 $\ddot{x} = -\omega^2 x$, 즉 $x = 0$을 중심으로 하는 단진동이다.

$\ddot{x} = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 쓰고 적분하면

$$\int v\,\mathrm{d}v = -\omega^2 \int x\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad v^2 = -\omega^2 x^2 + C.$$

이다. $x = 0$에서 속력이 u_0이므로 $C = u_0^2$이고

$$v^2 + \frac{\lambda}{lm}x^2 = u_0^2,$$

이다. 이것이 보이려던 것이다. (이는 에너지 보존(conservation of energy)과 같은 내용이다. 중력 퍼텐셜 에너지와 탄성 에너지를 합치면 $\frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{l}x^2$에 상수를 더한 꼴이 된다.)

첫 번째 튐

공이 바닥면에 닿으려면 $x = h$에서 $v^2 > 0$, 즉 $u_0^2 - \omega^2 h^2 > 0$이어야 한다. 이것이 바로 주어진 조건 $\lambda h^2 < lmu_0^2$이다. 따라서 공은 속력 w_0으로 바닥면에 부딪히며, 여기서

$$w_0^2 = u_0^2 - \omega^2 h^2.$$

이다. 뉴턴의 실험 법칙에 의해 공은 속력 ew_0으로 위쪽을 향해 바닥면을 떠난다.

$x = h$에서 $x = 0$까지 올라가는 동안에도 줄은 여전히 늘어나 있으므로 같은 운동 방정식이 성립하고, 에너지 적분은 $v^2 + \omega^2 x^2 =$ 상수이다. 달라지는 것은 상수뿐이다. $x = h$에서 $v^2 = e^2 w_0^2$이므로 상수는 $e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2$이고, $x = 0$에서

$$\begin{aligned} u_1^2 &= e^2 w_0^2 + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) + \omega^2 h^2 \\ &= e^2 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^2 \right), \end{aligned}$$

이다. 이것이 보이려던 것이다. 여기서 u_1의 방향은 위쪽이다.

두 번째 튐

> **생각해 보기** $x = 0$을 지난 뒤 공은 평형 위치보다 위로 올라가고, 줄이 느슨해질 수도 있다. 그래도 공은 속력 u_1로 $x = 0$에 되돌아오는가?

그렇다. $x = 0$ 위에서 공은 무게와 줄의 장력을 받거나, 줄이 느슨해지면 중력만 받으며 움직인다. 두 힘은 모두 보존력(conservative force)이다. 줄이 느슨할 때는 탄성 에너지가 그냥 0일 뿐이다. 따라서 $x = 0$ 위에서 비행하는 동안 내내 전체 역학적 에너지가 보존된다. 공이 다시 $x = 0$으로 내려오면 떠날 때와 같은 퍼텐셜 에너지를 가지므로, 속력도 같은 u_1이며 이번에는 방향이 아래쪽이다.

그러므로 두 번째 하강은 u_0 대신 u_1이 들어간다는 점만 빼면 첫 번째와 똑같다. 여전히 공이 바닥면에 닿아야 하는데,

$$u_1^2 - \omega^2 h^2 = e^2 \left(u_0^2 - \omega^2 h^2 \right) > 0.$$

이므로 실제로 닿는다. 첫 번째 튐에서의 논증을 u_0을 u_1으로 바꾸어 되풀이하면

$$\begin{aligned} u_2^2 &= e^2 u_1^2 + \omega^2 h^2 \left(1 - e^2 \right) \\ &= e^2 \left[e^2 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \right] + \omega^2 h^2 (1 - e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \omega^2 h^2 (1 - e^2)(1 + e^2) \\ &= e^4 u_0^2 + \frac{\lambda}{lm} h^2 \left(1 - e^4 \right), \end{aligned}$$

이고, 이것으로 문제가 해결된다.

검산

- $e = 1$이면 에너지 손실이 없고, 두 공식 모두 마땅히 그래야 하듯 $u_1 = u_2 = u_0$을 준다.
- $e = 0$이면 공은 정지한 상태로 바닥면을 떠나고, 이때 $u_1^2 = \omega^2 h^2$이다. 즉 공은 진폭 h인 위치에서 정지 상태로부터 올라가 속력 ωh로 중심을 지나며, 이는 단진동이 예측하는 그대로이다.
- 규칙성을 깔끔하게 보는 방법이 있다. 튈 때마다 충돌 속력의 제곱에 e^2이 곱해지므로 $u_n^2 - \omega^2 h^2 = e^{2n}\left(u_0^2 - \omega^2 h^2\right)$이다.
- 줄이 느슨해질 수 있도록 하여 운동을 수치적으로 계산해 보았다(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법). 예를 들어 $m = 1$, $l = 1$, $\lambda = 20$, $g = 9.8$, $u_0 = 6$, $h = 0.3$, $e = 0.9$일 때 시뮬레이션 결과는 $u_1 = 5.4316$, $u_2 = 4.9233$으로 공식과 일치한다. 이 예에서는 튀는 사이에 줄이 실제로 느슨해진다.

흔한 실수

- x를 평형 위치가 아니라 자연 길이에서부터 재는 것. 그러면 무게가 상쇄되지 않아 공식에 일차항이 덧붙는다.
- 반발 계수(coefficient of restitution) e를 $x = h$에서의 충돌 속력이 아니라 $x = 0$에서의 속력에 적용하는 것.
- 평형 위치 위에서도 줄이 팽팽하게 유지된다고 가정하는 것. 꼭 그렇지는 않지만, 에너지 보존 덕분에 이는 $x = 0$에서의 속력과는 무관하다.

STEP 너머

평형점 주위에서 중력이 상쇄되는 현상은 일반적인 원리의 첫 사례이다. 평형점 주위에서 선형화(linearise)하면 작은 진동은 단진동이 되고, ω^2은 "강성(stiffness)"을 질량으로 나눈 값과 같다. 튀는 공은 조각별로 매끄러운(piecewise-smooth) 진동자, 곧 **충돌**(*impact*) 진동자의 한 예이다. 이런 계는 바닥면 자체가 움직일 때 놀라울 만큼 풍부한 거동(주기 배가(period doubling), 나아가 혼돈(chaos)까지)을 보일 수 있다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동자와 에너지 방법을 대학 1학년 수준에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.